RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVA Y MULTIPLICATIVA EN GRADO SEXTO

NICOLLE JOHANA GÓMEZ RODRÍGUEZ
MARYURI RAMÍREZ ROBLES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD SEDE DUITAMA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
DUITAMA
2017

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVA Y MULTIPLICATIVA EN GRADO SEXTO

NICOLLE JOHANA GÓMEZ RODRÍGUEZ
MARYURI RAMÍREZ ROBLES

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Estadística

Directora
Ana Cecilia Medina Mariño
Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor Estadístico
Dairo Sigifredo Gil Gil
Especialista en Estadística

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD SEDE DUITAMA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
DUITAMA
2017

Nota de aceptación:

____
____
____
____
____
____
____

____
Firma del presidente del jurado

____
Firma del jurado

____
Firma del jurado

____
Firma del director

Duitama, __ de Octubre del 2017

DEDICATORIA

Este trabajo de grado se lo dedicamos principalmente a Dios pues siempre fue la fuerza impulsora en el desarrollo de esta investigación.

A nuestros padres quienes nos apoyaron e impulsaron a terminar esta carrera, siendo siempre una base sólida a la hora de tomar decisiones importantes en nuestro proceso de formación e enriquecimiento profesional y personal .

A nuestras hermanas quienes siempre nos brindaron ayuda en momentos de desánimo y nos demostraron que no existen los limites cuando se quiere ir en busca de llevar a cabo nuestros propósitos.

A nuestros amigos quienes sin esperar nada a cambio compartieron sus conocimientos, sus abrazos, risas, consejos, palabras de motivación y nos enseñaron que con esfuerzo y dedicación se pueden lograr los propósitos.

A nuestros maestros quienes con sabiduría nos transmitieron sus conocimientos y fueron una pieza importante en este proceso de formación, en especial: a la MSc. Ana Cecilia Medina y el Especialista Dairo Gil por haber guiado el desarrollo de esta investigación y llegar a la culminación del mismoy a cada una de las personas que de una u otra manera nos han apoyado y han contribuido a cumplir con esta meta.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente nuestros agradecimientos van dirigidos a quien nos permitió hacer este sueño realidad, a Dios, de igual manera agradecemos a nuestros padres, hermanas y amigos quienes con su amor, alegría y palabras de aliento, nos dieron la fuerza necesaria para seguir en pie con este trabajo, en especial a nuestro compañero y gran amigo Sergio Duvan Santos, quien aportó su granito de arena para la realización de esta investigación en el aula, sin olvidar a nuestra directora de trabajo de grado MSc. Ana Cecilia Medina y nuesto asesor estadístico el Especialista Dairo Gil, quienes nos brindaron su apoyo y compartieron su conocimiento para poder culminar esta investigación.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN 11
2. GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN EN EL AULA 13
   2.1. DIAGNÓSTICO PRELIMINAR 13
   2.2. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 14
   2.3. OBJETIVOS 15
   2.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN EL AULA 16
   2.5. METODOLOGÍA 17
      2.5.1. Población 17
      2.5.2. Tipo de investigación 17
      2.5.3. Instrumentos 21
3. MARCO TEÓRICO 25
   3.1. PERSPECTIVA CURRICULAR 27
      3.1.1. Estándares básicos de competencias matemáticas 27
      3.1.2. Derechos básicos de aprendizaje 27
   3.2. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO 28
      3.2.1. Análisis fenomenológico de los números naturales 28
      3.2.2. Sistemas de representación de los números naturales 29
      3.2.3. Estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales 30
   3.3. PERSPECTIVA COGNITIVA 34
      3.3.1. Errores asociados al aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales inmersas en situaciones problema 34
      3.3.2. Competencias Matemáticas 36
      3.3.3. Resolución de problemas como competencia matemática 36
   3.4. PERSPECTIVA DIDÁCTICA 37
      3.4.1. Resolución de problemas como estrategia de enseñanza 38
      3.4.2. Etapas para resolver problemas propuestas por Polya 39
      3.4.3. Estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas 40
4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA 44
   4.1. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA 44
   4.2. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA 45

4.3. PROPUESTA SECUENCIAL DE ENSEÑANZA 48
4.3.1. Guías de aprendizaje con resolución de problemas apoyándose en metodología Taller constructivo 50
4.3.2. Secuencias con metodología Tradicional 63
5. RESULTADOS 72
5.1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS 73
5.2. PRUEBA DE LAS HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS 75
5.2.1. Calificación del desempeño de los estudiantes en el cuestionario final dependiendo de la metodología de enseñanza usada en cada grupo 76
5.2.2. Calificación promedio del desempeño de los estudiantes de las tres secuencias desarrolladas 83
6. CONCLUSIONES 94
7. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS 96
8. ANEXOS 99

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Rúbrica para la evaluación de la competencia de la formulación y resolución de problemas. 22
Tabla 2. Tipos de problemas aditivos y multiplicativos. 33
Tabla 3. Errores de comprensión – representación. 35
Tabla 4. Errores de ejecución del algoritmo. 35
Tabla 5. Tipos de problemas aritméticos. 37
Tabla 6. Contenidos conceptuales y procedimentales. 46
Tabla 7. Fases en que se desarrolló la propuesta de enseñanza. 46
Tabla 8. Secuencias didácticas resolución de problemas estructurados con la estrategia metodológica taller constructivo. 47
Tabla 9. Secuencias con metodología tradicional. 48
Tabla 10. Síntesis de la rúbrica para evaluar la competencia de resolución de problemas 72
Tabla 11. Estadísticos descriptivos metodología tradicional y resolución de problemas con metodología taller constructivo. 74
Tabla 12. Análisis descriptivo 78
Tabla 13. Prueba de normalidad 79
Tabla 14. ANOVA 82
Tabla 15. Diferencia de medias. 82
Tabla 16. Prueba de normalidad para la calificación promedio de las secuencias. 89
Tabla 17. ANOVA la calificación promedio de las secuencias por estudiante. 92
Tabla 18. Diferencia de medias para la calificación promedio de las secuencias. 92

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1.Sistemas de representación de los números naturales. 29
Gráfica 2. Conceptos y procedimientos de esta investigación...31
Gráfica 3. Calificación del cuestionario Inicial 73
Gráfica 4. Calificación del cuestionario final. 76
Gráfica 5. Las calificaciones del cuestionario final de los estudiantes..................................79
Gráfica 6. Gráfico para probar normalidad de la variable respuesta.....................................80
Gráfica 7.Calificación promedio de las secuencias por grupo 83
Gráfica 8.Las calificaciones promedio de las secuencias desarrolladas por los estudiantes. 88
Gráfica 9. Gráfico para probar normalidad de la calificación promedio de las secuencias.90

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Cuestionario Inicial 99
Anexo B. Plan del cuestionario Inicial..100
Anexo C. Cuestionario Final 104
Anexo D. Plan del cuestionario final 105
Anexo E. Matriz resumen de observación diligenciada de Resolución de problemas con la estrategia metodológica Taller Constructivo...108
Anexo F. Matriz resumen de observación diligenciada de la metodología tradicional 110
Anexo G. Síntesis Etapas de la estrategia metodológica Taller Constructivo 112
Anexo H. Secuencias de enseñanza estructuradas con la estrategia Metodológica Taller Constructivo para el Grupo Experimental. 113
Anexo I. Calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo experimental 130
Anexo J. Calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo testigo 131

1. INTRODUCCIÓN

Este Trabajo de Grado se llevó a cabo en la modalidad de presentación y desarrollo de un proyecto de investigación, según el literal a) del Artículo 1 de la Resolución 16 de 2009. Este corresponde al proyecto de investigación en el aula que se elaboró en el marco de la Práctica Pedagógica Investigativa de Profundización ubicada en el décimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad Sede Duitama, atendiendo al parágrafo único del Artículo 19 de la resolución 37 de 2015. Esta práctica tiene como objetivo resignificar, fortalecer el sentido pedagógico y afianzar los conocimientos teóricos, prácticos e investigativos que integran los saberes interdisciplinar, disciplinar y de profundización del plan de estudios.

La propuesta didáctica surgió de un diagnóstico preliminar en donde se identificaron los errores más frecuentes y las dificultades manifestadas por los estudiantes de los cursos 605 y 607 del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino de Duitama (ITSTA) a la hora de resolver situaciones problema con números naturales. Tenía como objetivo proponer e implementar situaciones problema que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa en el curso 607 del ITSTA, con el fin de ayudar a desarrollar en los estudiantes la competencia de resolución de problemas, competencia básica para el desarrollo del pensamiento matemático, reconocida por el MEN en los Estándares Básicos de Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

Esta investigación responde a la perspectiva curricular propuesta por el Ministerio de Educación Nacional, y se apoyó teóricamente en los siguientes tópicos de investigaciones en Educación Matemática: análisis del contenido matemático (Rico, Lupiañez, Marín y Gómez, 2007), las estructuras aditiva y multiplicativa (Vergnaud, 2004), errores asociados a las estructuras aditiva y multiplicativa en situaciones problema (Flores, Castro y Fernández, 2015) y la resolución de problemas matemáticos (Polya, 2005).

Se utilizó la metodología de Diseño de Experimentos siguiendo las etapas según Gutiérrez y De La Vara (2003). La propuesta de enseñanza estuvo conformada por tres secuencias didácticas estructuradas con la estrategia metodológica de Taller Constructivo (Medina, 1998), la cual se sistematizó utilizando los instrumentos diseñados previamente, con el fin de analizar y evaluar los resultados de la investigación.

Este informe está organizado en cinco capítulos, en el primer capítulo se presentan las generalidades de la investigación en el aula que tiene que ver con el diagnostico, planteamiento y formulación del problema, objetivos, justificación y metodología. En el segundo capítulo se encuentra el marco teórico que está constituido por cuatro componentes que son perspectiva curricular, análisis del contenido matemático, perspectiva cognitiva y perspectiva didáctica. El tercer capítulo describe el desarrollo de la propuesta didáctica de enseñanza y en los capítulos cuarto y quinto se encuentran los resultados y conclusiones de esta investigación.

2. GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN EN EL AULA

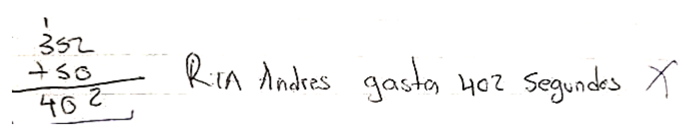
2.1. DIAGNÓSTICO PRELIMINAR

Esta investigación se inició con la elaboración de un diagnóstico en la Práctica Pedagógica Investigativa de Profundización del programa de Licenciatura en Matemáticas y Estadística, siendo esta un componente esencial en la formación inicial de un profesor, debido a que se convierte en el espacio para usar el conocimiento profesional construido durante el programa y desarrollar competencias profesionales que le permitan “aprender a enseñar matemáticas” y apropiarse de herramientas fundamentales para desempeñar su papel: “enseñar a aprender matemáticas”.

La información se recogió aplicando un cuestionario inicial a 76 estudiantes de los cursos 605 y 607 del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino (ITSTA) con el objetivo de identificar los niveles de competencia de resolución de problemas aritméticos de los estudiantes de grado sexto del ITSTA en las estructuras aditiva y multiplicativa de números Naturales inmersas en situaciones problema

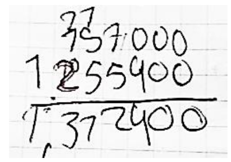
En el análisis de los resultados del cuestionario inicial se detectaron algunos errores y la forma de interpretar los tipos de problemas de las estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema propuestos por Flores et al. (2015).

La mayoría de los errores cometidos en situaciones problema son de comprensión – representación y de ejecución del algoritmo, el 50% de los estudiantes cometió el error del uso de la operación opuesta a la requerida en el problema, el 65,78 % incurrió en el uso inadecuado de palabras clave y el 78,9 % omitieron o cambiaron pasos del algoritmo. Por ejemplo, cuando se les planteó el problema: Ana María gasta 352 segundos en dar una vuelta alrededor de la cancha de futbol. Ana María gasta 50 segundos más que Andrés. ¿Cuántos segundos gastó Andrés en dar la vuelta alrededor de la cancha de futbol?



En el desarrollo de esta situación problema cometieron el error de utilizar la operación opuesta a la que se necesitaba debido al mal uso de la expresión “más que”, por lo tanto, los estudiantes sumaron los 352 segundos que gasta Ana María con los 50 segundos que gasta ella más que Andrés en lugar de buscar un número que al sumarle 50 dé como resultado 352, que son los segundos que gasta Ana María en dar la vuelta a la cancha de futbol.

De igual manera se les planteó esta situación problema, Juan tiene $157.000 en una alcancía y tiene 1’255.400 en el Banco Popular. ¿Cuánto dinero tiene Juan en total?



El error que se cometió fue la ejecución incorrecta del algoritmo en la estructura aditiva (adición) ya que olvidó aplicar el concepto de la adición agrupando.

2.2. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Después de aplicar y analizar las respuestas del cuestionario inicial se identificó que algunos de los errores que cometen los estudiantes de los cursos 605 y 607 del ITSTA en las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales que involucran situaciones problema se deben a la ausencia de la competencia de resolución de problemas, por lo tanto, esta investigación en el aula se basó en incentivar el desarrollo de esta competencia en los estudiantes, interactuando con el contexto escolar y el no escolar, siendo estos contextos significativos para el aprendizaje de los niños.

Al analizar las respuestas del cuestionario inicial se evidenció una baja presencia de la competencia de resolución de problemas por algunos de los errores encontrados como lo son errores de comprensión – representación y errores de ejecución del algoritmo, debido a que los estudiantes en el desarrollo de las situaciones problema planteadas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa, usaron inadecuadamente las palabras clave u omitieron pasos del algoritmo.

También de las observaciones realizadas en las clases de matemáticas en los cursos 605 y 607 orientadas por la docente titular, se pudo inferir que estas se llevan a cabo basándose en un texto guía, empezando con los conceptos, seguido por algunos ejemplos, ejercicios planteados y para culminar el proceso de enseñanza-aprendizaje se incluyen situaciones problema.

A pesar de que la docente promueve una participación activa en el aula de clase con talleres y demás actividades, hay estudiantes que no se interesan por la materia, ni por solucionar las inquietudes que se dan cuando el docente está explicando el tema por descuido e indisciplina.

Se concluyó que una manera para subsanar estos errores puede ser familiarizar al estudiante con situaciones problema, tal que, verá el sentido y la utilidad de la matemática y el por qué de sus operaciones, además, será significativo el aprendizaje al incentivar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Por las razones anteriormente expuestas surge la pregunta de investigación:

¿Cuál es el efecto de usar situaciones problema para desarrollar la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales a un grupo experimental de grado sexto del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino?

De igual forma surgió una proposición que fue formulada como hipótesis del problema anteriormente planteado.

Al implementar la resolución de situaciones problema en contexto con la estrategia metodológica Taller Constructivo al grupo experimental, se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

2.3. OBJETIVOS

Para el desarrollo de la investigación se planteó como objetivo general: proponer e implementar situaciones problema que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales a un grupo experimental para determinar el efecto en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Para lograr el objetivo general se tuvieron en cuenta los siguientes objetivos específicos:

- Realizar un diseño experimental en el aula con el fin de identificar cuál metodología de enseñanza es la más adecuada para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales.

- Diseñar e implementar actividades en las cuales los estudiantes formulen y resuelvan situaciones problema en contexto y construyan su propio conocimiento.

- Evaluar y comparar el nivel de competencia de resolución de problemas del grupo experimental respecto al nivel de competencia del grupo testigo, teniendo en cuenta los resultados cualitativos y cuantitativos obtenidos en cada uno de los cuestionarios (inicial y final) y las secuencias desarrolladas por los estudiantes.

2.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN EL AULA

¿Por qué desarrollar la competencia resolución de problemas?

Como lo afirma Rico () en la tendencia Internacional se ha identificado que a los estudiantes les hace falta desarrollar las habilidades matemáticas, las competencias en situaciones de la vida. Así mismo, en los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006 y 2016) el estudiante no se debe centrar en el algoritmo ni en el trabajo mecánico y rutinario, si no en llevar un proceso de reflexión verificación, justificación y aprendizaje.

Teniendo en cuenta la importancia de la competencia de resolución de problemas en los en los proceso generales de aprendizaje de las matemáticas reconocida por el MEN en los Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos de Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), surgió la propuesta de aplicar un diseño de experimentos con el fin de proponer e implementar situaciones problema que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales con metodología taller constructivo al grupo experimental conformado por estudiantes del grado sexto del ITSTA, para determinar el efecto en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas, comparándolo con el grupo testigo al cual se le enseñó los algoritmos de adición, sustracción, multiplicación y división con metodología tradicional.

Esta propuesta de enseñanza para orientar las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales inmersas en situaciones problema, se realizó en la asignatura de matemáticas de los cursos 605 y 607. Cada curso tenía una intensidad semanal de 6 horas, con la única diferencia que uno de los dos sextos era el grupo testigo que manejó metodología tradicional y el otro sexto era el grupo experimental, en donde se implementó la resolución de situaciones problema para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales con la estrategia metodológica taller constructivo. Esta intervención que se llevó a cabo en el grupo experimental buscaba fortalecer sus procesos de aprendizaje en el área de Matemáticas, con el fin de ayudar a superar algunos errores tanto en la comprensión, interpretación y análisis de situaciones problema, como en los procesos matemáticos. La resolución de problemas juega un papel fundamental en el aprendizaje de cualquier contenido matemático, como lo expresan Godino, Batanero y Font (2003):

> El dar un papel primordial a la resolución de problemas y a la actividad de modelización tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería cuanto menos contradictorio con la génesis histórica de las matemáticas, al igual que con sus aplicaciones actuales, presentar las matemáticas a los alumnos como algo cerrado, completo y alejado de la realidad. Debe tenerse en cuenta, por una parte, que determinados

> conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y por otra, que a menudo estos problemas no estrictamente matemáticos en su origen proporciona la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos. (p. 26)

Teniendo en cuenta la importancia de la resolución de problemas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, se presentaron los contenidos matemáticos a los estudiantes inmersos en situaciones problema, permitiendo que este construya su conocimiento viendo la utilidad de las matemáticas y llevando estos conceptos a la realidad.

> Una de las actuales críticas a la formación matemática que los niños reciben en la escuela, cuestiona que la actividad matemática escolar se refiere únicamente a los conocimientos procedimentales y poco o nada se hace énfasis en los conocimientos conceptuales, posibles de construir a partir de las experiencias que los niños tienen en su interacción con el entorno, tanto no escolar como escolar, pensados como espacios de significación y comprensión. (Bonilla et al., 1999, p.46)

2.5. METODOLOGÍA

El tipo de investigación que se utiliza para la realización de esta investigación es metodología diseño de experimentos con las estrategias de enseñanza resolución de problemas con metodología taller constructivo y metodología tradicional, usando diferentes instrumentos para la toma de los datos, además para evaluar las secuencias didácticas se diseñó una rúbrica por competencias.

2.5.1. Población

La población objetivo estuvo conformada por 76 estudiantes de los cursos 605 y 607, con edades entre 10 y 15 años de estratos socioeconómicos 1, 2 y 3 del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino de la ciudad de Duitama, institución de tipo técnico que ofrece cinco modalidades, entre ellas la especialidad en matemáticas y estadística.

2.5.2. Tipo de investigación

Se utilizó un diseño de experimentos en el cual se considera un sólo factor de interés y el objetivo es comparar los dos tratamientos, metodología tradicional y resolución de problemas con estrategia metodológica taller constructivo para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales, con el fin de elegir la metodología más adecuada. Este experimento se llevó a cabo de forma paralela en los dos cursos, cada uno con tres secuencias didácticas.

Según Gutiérrez y De la Vara (2003):

> **Diseño de experimentos:** Es la aplicación del método científico para generar conocimiento acerca de un sistema o proceso, por medio de pruebas planeadas adecuadamente. Esta metodología se ha ido consolidando como un conjunto de técnicas estadísticas y de ingeniería, que permite entender mejor situaciones complejas de relación causa efecto.

El diseño que se aplicó en esta investigación fue a una vía de clasificación y bivalente. Gómez (1983) afirma. "Diseño bivalente es aquel en el cual se comparan solo dos condiciones, por ejemplo, La presencia o ausencia de alcohol en la germinación del frijol" (p. 33).

Algunos elementos que se tienen en cuenta en este diseño de experimentos descritos por Gutiérrez y De la Vara (2003) son: Unidad experimental, variables respuesta, factores controlables, factores no controlables, factores estudiados, tratamientos, replicas, error aleatorio y error experimental.

- **Unidad experimental:** Es la pieza(s) o muestra(s) que se utilizan para generar un valor que sea representativo del resultado del experimento o prueba.

  Para esta investigación la unidad experimental es cada estudiante de los cursos 605 y 607 matriculado en el año 2017 en el ITSTA que asistió a todas las sesiones propuestas para llevar a cabo esta investigación. Por consiguiente, se tomaron 21 estudiantes del curso 605 y 30 estudiantes del curso 607.

- **Variables respuesta:** A través de esta(s) variable(s) se conoce el efecto o los resultados de cada prueba experimental, por lo que pueden ser características de la calidad de un producto y/o variables que miden el desempeño de un proceso. Las variables respuesta para esta investigación son:

Y_1: La calificación del desempeño de cada estudiante de los grupos experimental y testigo en el cuestionario final, identificando el nivel (Total, parcial, mínimo y nulo) de desarrollo de la competencia de resolución de problemas teniendo en cuenta la rúbrica de evaluación propuesta en el apartado 1.5.3. de este informe.

$Y_{2:}$ La calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los grupos experimental y testigo obtenida de las tres secuencias desarrolladas, identificando el nivel de desarrollo de la competencia de resolución de problemas teniendo en cuenta la rúbrica de evaluación propuesta en el apartado 1.5.3. de este informe.

- **Factores controlables:** Son variables de proceso o características de los materiales experimentales que se pueden fijar en un nivel dado. Algunos de éstos son los que usualmente se controlan durante la operación normal de proceso, y se distinguen porque, cada uno de ellos, existe la manera o el mecanismo para cambiar o manipular su nivel de operación.

Los factores controlables son:

- ✓ Disciplina.
- ✓ El clima dentro del aula (ventilador para caliente y frio).
- ✓ Plantear Situaciones problema verdaderamente significativas y motivantes.
- ✓ Plantear la resolución de problemas con metodología taller constructivo para promover el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

- **Factores no controlables o de ruido:** son variables o características de materiales y métodos que no se pueden controlar durante el experimento a la operación normal del proceso.

Los factores no controlables son:

- ✓ La motivación.
- ✓ El estado de ánimo del estudiante.
- ✓ Problemas de salud físicos y psicológicos.
- ✓ Cambio climático (el ruido de la lluvia, truenos)
- ✓ Inteligencias múltiples.
- ✓ Coeficiente Intelectual

- **Factor estudiado:** Son la variables que se investigan en el experimento, respecto de cómo influyen o afectan a la(s) variable(s) de respuesta. Los factores estudiados pueden ser controlables o no controlables, a estos últimos quizá fue posible y de interés controlarlos durante el experimento.

El factor estudiado es la metodología utilizada (Resolución de problemas con la estrategia metodológica taller constructivo y metodología tradicional).

- **Niveles y tratamientos:** Los diferentes valores que se asignan a cada factor estudiado en un diseño experimental se llaman niveles. Una combinación de niveles de todos los factores estudiados se llama tratamiento o punto de diseño. De acuerdo con estas definiciones, en el caso de experimentar con un solo factor, cada nivel es un tratamiento.

  Como el diseño de experimentos para esta investigación consta de un solo factor, los tratamientos son:

- ✓ Grupo experimental (grado 607)
- ✓ Grupo testigo (grado 605)

Al grupo experimental se le orientó sobre las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales por medio de resolución de problemas con la estrategia metodológica taller constructivo y al grupo testigo se le enseñó con metodología tradicional.

- **Réplicas:** Es el número de veces que se corre cada tratamiento. Por lo tanto, el número de réplicas para esta investigación fueron el total de los estudiantes de los grupos testigo y experimental que asistieron a todas las sesiones requeridas para esta investigación, es decir 21 del curso 605 y 30 del curso 607.

- **Error aleatorio y error experimental:** Siempre que se realiza un estudio experimental, parte de la variabilidad observada en la respuesta no se podrá explicar por los factores estudiados. Esto es, siempre habrá remanente de variabilidad que se debe a causas comunes o aleatorias, que genera la variabilidad natural del proceso. Esta variabilidad constituye el llamado error aleatorio.

  El error experimental (ε_{ij}) es un componente del error aleatorio que refleja los errores del experimentador en la planeación y ejecución del experimento.

Etapas en el diseño experimental

Las etapas de diseño experimental según Gutiérrez y De la Vara (2003) son: planeación, realización, análisis, interpretación y control y conclusiones finales.

➢ **Planeación y realización**

- Entender y delimitar el problema u objeto de estudio.
- Elegir la(s) variable(s) de respuesta que será medida en cada punto del diseño y verificar que se mide de manera confiable.
- Determinar cuáles factores deben estudiarse o investigarse, de acuerdo a la supuesta influencia que tienen sobre la respuesta.
- Seleccionar los niveles de cada factor, así como el diseño experimental adecuado los factores que se tienen y al objetivo del experimento.
- Planear y organizar el trabajo experimental.
- Realizar el experimento.

➢ **Análisis**

En esta etapa no se debe perder de vista que los resultados experimentales son observacionales muéstrales, no poblacionales. Por ello, se debe recurrir a métodos estadísticos inferenciales para ver si las diferencias o efectos muéstrales (experimentales) son lo suficientemente grandes para que garanticen diferencias poblacionales (o a nivel proceso). La técnica estadística central en el análisis de experimentos es el llamado análisis de varianza ANOVA.

- **Interpretación**

Aquí, con el respaldo del análisis estadístico formal, se debe analizar con detalle lo que ha pasado en el experimento, desde contrastar las conjeturas iniciales con los resultados del experimento, hasta observar los nuevos aprendizajes que sobre el proceso se lograron, verificar supuestos y elegir el tratamiento ganador, siempre con apoyo de las pruebas estadísticas.

- **Control y conclusiones finales**

Para concluir el estudio experimental se recomienda decidir qué medidas implementar para generalizar el resultado del estudio y para garantizar que las mejoras se mantengan. Además, es preciso organizar una presentación para difundir los logros.

2.5.3. Instrumentos

Beltrán, Camargo, López, Martínez y Cañadas (2016) afirman que “En la recolección de información durante la implementación de la propuesta hay instrumentos con los cuales se pueden obtener datos sobre la pertinencia del diseño, el proceso de aprendizaje y el desarrollo de las expectativas afectivas”. (p.107) Para el seguimiento y evaluación de la propuesta de enseñanza se diseñaron y utilizaron los siguientes instrumentos:

- Grabaciones y filmaciones

- Cuestionarios inicial y final que tenían como propósito identificar los niveles de competencia de resolución de problemas aritméticos de los estudiantes de grado sexto del ITSTA en las estructuras aditiva y multiplicativa de números Naturales inmersas en situaciones problema. (Anexo A y Anexo C)

- Secuencias para el aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplicativa del grupo experimental y el grupo testigo.

- Matriz de Observación adaptada de MEN (2009) para sistematizar la propuesta de enseñanza, tiene como objetivo identificar las fortalezas, obstáculos y dificultades de cada secuencia teniendo en cuenta el alcance de los objetivos, la interacción profesor – estudiante, materiales y recursos utilizados, entre otros. (Anexo E y Anexo F)

- Rúbrica para evaluar el nivel de competencia de formulación y resolución de situaciones problema de los estudiantes en los instrumentos cuestionario inicial, cuestionario final y las secuencias, usados para la toma de los datos. (Tabla1.)

La rúbrica de evaluación y el objetivo de aprendizaje de este trabajo fueron adaptados de Beltrán et al. (2016) y Derechos Básicos de Aprendizaje según MEN (2016), utilizados para evaluar los cuestionarios (inicial y final) y cada una de las secuencias desarrolladas en la propuesta de enseñanza tanto en el grupo testigo con metodología tradicional como en el grupo experimental usando resolución de problemas con metodología taller constructivo para la orientación de las estructuras aditiva y multiplicativa. Por lo tanto, las dos competencias generales para este trabajo fueron:
K1. Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos y multiplicativos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos.

K2. Representa las estructuras aditiva y multiplicativa haciendo uso de los diferentes sistemas de representación.

Tabla 1. Rúbrica para la evaluación de la competencia de la formulación y resolución de problemas.

Estructura	Criterio	Indicador	Nivel	Valoración
Aditiva **(Adición y sustracción)**	Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos de combinación y comparación en diferentes contextos.	Interpreta, representa y resuelve adecuadamente situaciones problema identificando la estructura aditiva correspondiente.	Total	8 – 10
		Interpreta y representa adecuadamente situaciones problema identificando la estructura aditiva correspondiente.	Parcial	6 - 7.9
		Se le dificulta identificar y utilizar la estructura aditiva correspondiente, pero resuelve adecuadamente la operación.	Mínimo	3 - 5.9
		No identifica la estructura aditiva correspondiente, por lo tanto se le dificulta interpretar, representar y resolver adecuadamente	Nulo	1-2.9

		situaciones problema con la estructura aditiva.		
Multiplicativa **(Multiplicación y división)**	Interpreta, formula y resuelve problemas multiplicativos de comparación, isomorfismos en diferentes contextos.	Interpreta, representa y resuelve adecuadamente situaciones problema identificando la estructura multiplicativa correspondiente.	Total	8 – 10
		Interpreta y representa adecuadamente situaciones problema, identificando la estructura multiplicativa correspondiente.	Parcial	6 - 7.9
		Se le dificulta identificar y utilizar la estructura multiplicativa correspondiente, pero resuelve adecuadamente la operación.	Mínimo	3- 5.9
		No identifica la estructura multiplicativa correspondiente, por lo tanto se le dificulta interpretar, representar y resolver adecuadamente situaciones problema con la estructura multiplicativa.	Nulo	1-2.9
Combinación **(Adición, sustracción, multiplicación y División)**	Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos y multiplicativos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos.	Interpreta, formula y resuelve adecuadamente situaciones problema combinando las dos estructuras aditiva y multiplicativa, identificando y usando las estructuras correspondientes.	Total	8 – 10
		Formula e interpreta adecuadamente situaciones problema combinando las dos estructuras aditiva y multiplicativa, identificando y usando las estructuras correspondientes.	Parcial	6 - 7.9
		Desarrolla adecuadamente las adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones pero no identifica las estructuras aditiva y multiplicativa.	Mínimo	3- 5.9
		No identifica las estructuras correspondientes por lo tanto, se le dificulta interpretar, formular y resolver adecuadamente situaciones problema combinando las dos estructuras aditiva y multiplicativa.	Nulo	1-2.9
		Desarrolla adecuadamente las adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones pero no identifica las estructuras aditiva y multiplicativa.	Mínimo	3- 5.9

		No identifica las estructuras correspondientes por lo tanto, se le dificulta interpretar, formular y resolver adecuadamente situaciones problema combinando las dos estructuras aditiva y multiplicativa.	Nulo	1-2.9

Fuente: Adaptado de Beltrán et al. (2016)

3. MARCO TEÓRICO

De las investigaciones y estudios realizados se tuvieron en cuenta los antecedentes en torno a la temática de esta investigación, haciendo énfasis en el objetivo con el cual se realizó ese estudio y los hallazgos encontrados en cada uno. Estos se refieren al uso de la competencia resolución de problemas para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa como metodología de investigación, tomado un enfoque a nivel internacional y nacional.

Antecedentes internacionales:

Redondo (2014) desarrolla una propuesta práctica que fomenta el desarrollo de la creatividad de los alumnos en la resolución de problemas, y con ello observar la creatividad existente en el área de las matemáticas obteniendo como resultado que la resolución de problemas tiene gran importancia para el desarrollo integral del alumno y su vinculación con el medio que le rodea. Para la mayoría de los alumnos los problemas es lo más complicado de todos los contenidos matemáticos, pero a la vez les resulta lo más divertido y gratificante cuando encuentran la respuesta o respuestas correctas al problema planteado. Los problemas poseen gran vinculación con el mundo real, ya que en este se nos plantean situaciones cotidianas que se necesitamos resolver a través de las matemáticas. De modo que, la resolución de problemas contribuye al desarrollo pleno del alumno.

Villalobos (2008) expone que para lograr cambios significativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos, debe generar cambios en las prácticas docentes y en la realidad de las aulas. Desde esta contingencia, los profesores deben contar con las herramientas necesarias para enseñar a resolver problemas matemáticos.

No es extraño afirmar que el trabajo con la resolución de problemas de manera rutinaria y monótona, genera contra aprendizajes y dificulta la interiorización de los procesos, produciendo rechazos y bloqueos mentales. Debido a esto, resulta urgente “hacer real” la asociación de una matemática conceptual, con una matemática cotidiana y amigable, donde se asocie, se aplique y trabaje a favor de aprendizajes significativos y contextuales; ya que sólo en la medida que el trabajo con resolución de problemas, nos sea útil y aplicable, éste proporcionará aprendizajes significativos, y por tanto, adquirirá sentido y autenticidad.

Martinez (2012) encuentra que los niños representan extremamente la resolución de los problemas aditivos de diferentes maneras, las cuales son validas; pues las situaciones individuales de los niños propician un desarrollo cognitivo diferente. Los soportes de representación que los niños elaboran para resolver un problema aditivo se ven influidos por las situaciones didácticas implícitas en el mismo problema, y los procesos cognitivos de los alumnos. El docente, con el conocimiento de las diferentes formas de representación externa, de la resolución de problemas, puede favorecer la potencialidad de sus estudiantes para resolver diferentes problemas aditivos.

Pues los niños al resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos, desarrollaron competencias como: comprender los problemas, razonar los procedimientos para resolver uno u otro problema, argumentar sus formas de representar la resolución, su expresión oral y escrita al interactuar ideas y comunicar sus resultados a compañeros y la aplicadora, y sobre todo la autonomía en la decisión de resolver por uno u otro procedimiento sin necesidad de preguntar ¿Qué hago aquí maestra? ¿Es de suma o resta?

Antecedentes nacionales:

Echeverry (2013) propone determinar el tipo de estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de la estructura multiplicativa por medio de la resolución de problemas en grado 5° de educación básica en la Institución Educativa Mercedes Abrego, obteniendo como resultado que en cuanto al uso de las operaciones básicas se requiere reflexionar sobre ellas desde la perspectiva de herramientas para la solución de situaciones de la vida cotidiana. Se hace necesario que los procesos de enseñanza dejen de girar en torno a los procesos algorítmicos y de repetición, y pasen a la implementación de los mismos dentro de la resolución de problemas aritméticos donde el estudiante pueda analizar, plantear hipótesis, concertar y argumentar sus conocimientos; elementos fundamentales al momento de fomentar el pensamiento matemático.

El marco teórico para este estudio se estructuró en cuatro componentes: el primero es la perspectiva curricular donde se considera la competencia resolución de problemas y las estructuras aditiva y multiplicativa teniendo en cuenta estándares básicos (MEN, 2006) y Derechos básicos de aprendizaje según (MEN, 2016). El segundo es el análisis del contenido matemático donde se encuentra la fenomenología de los números naturales (Rico et al., 2007), sistemas de representación (Rico et al., 200) y las estructuras aditiva y multiplicativa según Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015). El tercer componente es la perspectiva cognitiva donde se describen los errores asociados a las estructuras aditiva y multiplicativa en situaciones problema (Flores et al. (2015), la competencia matemática y la resolución de problemas como competencia matemática (MEN,2006) y problema como lo define Bonilla et al. (1999) y el último componente es la perspectiva didáctica donde se expone la resolución de problemas como estrategia de enseñanza (Villalobos, 2008) , las etapas de resolución de problema (Polya, 2005) y las estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.1. PERSPECTIVA CURRICULAR

En este apartado se considera la competencia de resolución de problemas y las estructuras aditiva y multiplicativa desde la organización curricular del MEN en los Estándares Básicos de Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) y el plan de área del ITSTA.

3.1.1. Estándares básicos de competencias matemáticas

> Los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas se distribuyen según los tipos de pensamiento y sus sistemas, pero involucran también los procesos generales, reflejan los que tradicionalmente se habían llamado “los contenidos del área”, o sea, los conceptos y procedimientos de las matemáticas, y se refieren a los contextos en los cuales se pueden alcanzar y ojalá superar los niveles de competencia seleccionados como estándares para cada conjunto de grados. (MEN, 2006, p.71)

Los estándares básicos que se consideran en esta investigación son:

- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. (Cuarto y quinto)
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. (sexto a séptimo)

3.1.2. Derechos básicos de aprendizaje

> Los DBA se organizan guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados. (MEN, 2016, p. 6)

Los derechos básicos que se consideran en esta investigación son:

- Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos y multiplicativos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos.

- Representa las estructuras aditiva y multiplicativa haciendo uso de los diferentes sistemas de representación.

3.2. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

El análisis del contenido matemático describe la estructura y el estudio formal de los conceptos, teniendo como focos prioritarios el análisis fenomenológico y los sistemas de representación que conduce a dar respuesta a qué conocimientos son los que se consideran para ser objeto de enseñanza.

3.2.1. Análisis fenomenológico de los números naturales

En esta investigación se tuvo en cuenta la clasificación de contextos numéricos y situaciones de los números naturales según Rico et al. (2007):

- **Contextos:** Un contexto es un marco en el cual ciertos aspectos de la estructura conceptual atienden unas funciones, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.

  Existen varios contextos numéricos en el sistema de los números naturales, pero, en esta investigación se tuvieron en cuenta los contextos propuestos por Rico et al. (2007) los cuales satisfacen distintas funciones y atienden diferentes necesidades cuando se usan para contar, cuantificar y para operar.

  - El contexto numérico más sencillo utiliza los números para <u>contar</u>; en este caso su utilidad consiste en asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección.

  - El segundo tipo de contexto es aquel que usa los números como <u>cardinal</u>; se utiliza cuando se quiere dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos.

  - El contexto <u>operacional</u> es el más fecundo, en el que hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de acciones sobre y transformaciones con los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación.(p.12,13)

- **Situaciones:**

Rico et al. (2007). afirman que una situación viene dada por una referencia al mundo (natural, cultural y social) en la cual se sitúan las tareas y cuestiones matemáticas que se proponen a los estudiantes y sobre las que se centra su trabajo. Las situaciones son: personales, educativas o laborales, públicas y científicas. (p.11, 12)

- **Análisis fenomenológico de las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales**

Haciendo un análisis fenomenológico en relación a las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales, existen varias subestructuras que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades como lo exponen Rico et al. (2007), tomando como referencia las siguientes subestructuras:

1. La subestructura Aditiva de los números naturales, basada en las relaciones aditivas (suma y resta) y en sus propiedades, que simbolizamos por (N, +).

2. La subestructura Multiplicativa de los números naturales, subestructura basada en las relaciones multiplicativas (producto y división entera) y en sus propiedades; la simbolizamos por (N, x).

Los fenómenos que están en la base del Sistema Aditivo enunciados por Rico et al. (2007) son aquellos que se basan en la consideración de la unión de colecciones, en las acciones de juntar o añadir/ separar o segregar, en las comparaciones aditivas basadas en las relaciones cuánto más que/ cuánto menos que, y otras variantes similares: el listado de fenómenos aditivos puede ampliarse indefinidamente si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. (p.14)

Los fenómenos que están en la base del Sistema Multiplicativo expuestos por Rico et al. (2007), son aquellos que se basan en la consideración de la reiteración de colecciones, en las acciones de repetir/ repartir una cantidad, formar una cantidad varias veces mayor que otra/ o hacer un número dado de partes de una cantidad, en las comparaciones multiplicativas basadas en las relaciones tantas veces más que/ tantas veces menos que, en los emparejamientos de los elementos de dos colecciones y otras variantes similares; el listado de fenómenos multiplicativos puede ampliarse si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. (p.15)

3.2.2. Sistemas de representación de los números naturales

En esta investigación se tuvieron en cuenta diferentes sistemas de representación de los números naturales planteados por Rico et al. (2007), como son: sistemas de representación verbales, manipulables y gráficos como se observa en la Gráfica 1.

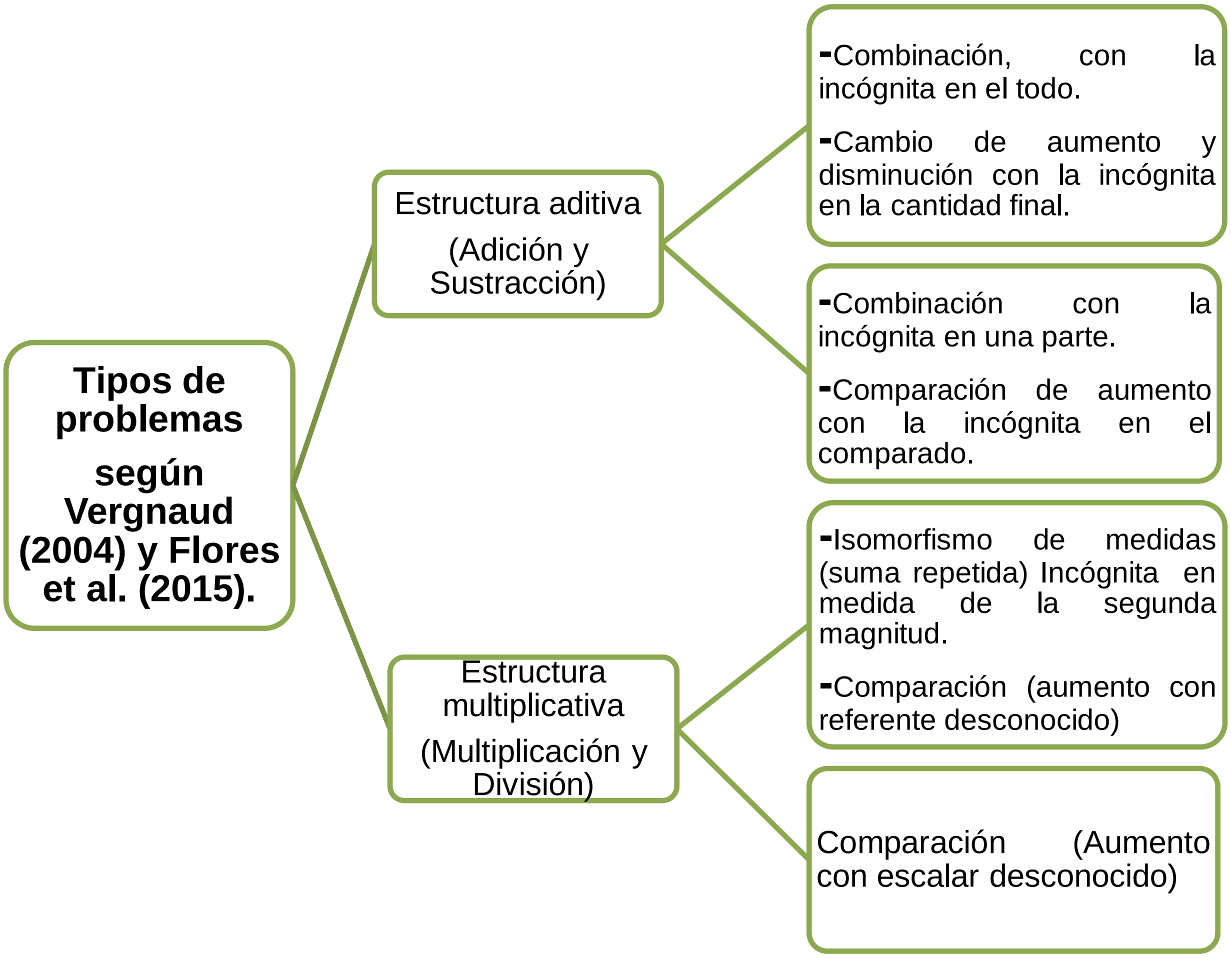
Gráfica 1.Sistemas de representación de los números naturales.

Fuente: Rico et al. (2007).

3.2.3. Estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales

Para el planteamiento y desarrollo de esta propuesta de enseñanza se tuvieron en cuenta las estructuras aditiva y multiplicativa y los tipos de problemas correspondientes según Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015). En la Gráfica 2 se sintetizan los conceptos y procedimientos utilizados en esta investigación.

Gráfica 2. Conceptos y procedimientos de esta investigación.



- **Estructura aditiva :**

Vergnaud (2004) afirma que “las matemáticas consideran a la sustracción y a la adición como operaciones matemáticas estrechamente emparentadas, por lo tanto, los problemas de tipo aditivo se entienden como aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones” (p.161).

Categorías de relaciones aditivas

Las categorías según Vergnaud (2004) son:

> Dos medidas se componen para dar lugar a una medida, una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida, una relación une dos medidas, dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación, una transformación opera sobre un estado relativo (una relación)

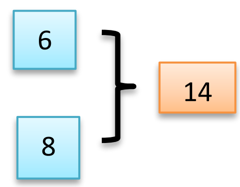
para dar lugar a un estado relativo, dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Para este trabajo se tuvieron en cuenta las siguientes categorías:

1. **Dos medidas se componen para dar lugar a una medida.**

   Ejemplo: Pablo tiene 6 canecas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canecas.

   6,8, 14 son números naturales.
   Esquema correspondiente:

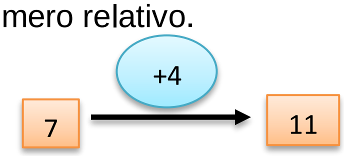
   Igualdad correspondiente: 6 + 8 = 14

   \+ es la ley de composición que compone a la adición de dos medidas, es decir de dos números naturales.

2. **Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.**

   Ejemplo: Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 4 canicas ahora tiene 11.

   7 y 11 son números naturales; +4 es un número relativo.
   Esquema correspondiente.

   Igualdad correspondiente: 7 + (+4) = 11

   \+ es la ley de composición que corresponde a la aplicación de una transformación sobre una medida, es decir a la adición de un número natural (7) y un número relativo (+4).

3. **Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.**

   Ejemplo: Luis ganó 8 caramelos ayer y hoy perdió algunos. Si al final ganó 3 caramelos. ¿Cuántos perdió en total?

   Las transformaciones corresponden a lo que ganó, lo que perdió y lo que perdió en total. Así, la adición corresponde a la composición de dos transformaciones (ganó 8, perdió algunos) para dar lugar a una nueva transformación gano tres caramelos.

- **Estructura multiplicativa.**

Se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas, define así las relaciones que comportan una multiplicación y una división. La más importante de ellas que se puede utilizar para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria; por ello no está bien representada en la escritura habitual de la multiplicación: $a \times b = c$ ya que dicha escritura no comporta más que 3 términos.

Isomorfismo de las medidas: La primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo. Ejemplo: Tengo tres paquetes de yogurt. Hay cuatro yogures en cada paquete ¿Cuántos yogures tengo?

Paquetes	Yogurt
1 ⟶	4
3 ⟶	X

El esquema utilizado no es otra cosa que la tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades. Dicho esquema aísla cuatro cantidades particulares en un cuadro más completo que representaría esta correspondencia; así, en el ejemplo solo se toman del siguiente cuadro completo las cuatro cantidades señaladas. (Vergnaud, 2004, p. 197-199)

Paquetes	Yogures
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
Etc	

También se tuvieron en cuenta algunos tipos de problemas aditivos y multiplicativos según Flores et al. (2015), que van de la mano con las estructuras que propone Vergnaud (2004) como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipos de problemas aditivos y multiplicativos.

	TIPO	**EJEMPLO**

ESTRUCTURA ADITIVA	a+ b=?	Combinación, con la incógnita en el todo.	Tengo 6 caramelos de menta y 3 de fresa ¿Cuántos caramelos tengo en total?
	a+ b=? a-b=?	Cambio de aumento y disminución con la incógnita en la cantidad final.	Juan tenía 4 canicas. Gana 3 ¿Cuántos tiene ahora? Juan tenía 4 canicas. Pierde 3 ¿Cuántos tiene ahora?
	?+ b= c	Combinación con la incógnita en una parte.	Tengo 6 caramelos, 4 son de menta y los demás de fresa. ¿Cuántos caramelos son de fresa?
		Comparación de aumento con la incógnita en el comparado.	María tiene $700. Juan tiene $300 más que María. ¿Cuánto dinero tiene Juan?
ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA		Isomorfismo de medidas (suma repetida) Incógnita en medida de la segunda magnitud	Luisa tiene 5 cajas, con 12 naranjas cada caja. ¿Cuántas naranjas tiene Luisa?
		Comparación (aumento con referente desconocido)	Andrés tiene el triple de Bombones de los que tiene María. Si María tiene 3 bombones, ¿Cuántos bombones tiene Andrés?
		Comparación (Aumento con escalar desconocido)	Andrés tiene 12 bombones y María 24 bombones. ¿Cuántas veces tiene María más bombones que Andrés?

Fuente: Rico y Flores (2015, p. 213, 225-226).

3.3. PERSPECTIVA COGNITIVA

En la perspectiva cognitiva se considera la noción de error, algunos tipos de errores en el aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplicativa y la resolución de problemas como competencia matemática.

3.3.1. Errores asociados al aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales inmersas en situaciones problema

Noción de error en matemáticas

Socas (1997) afirma: **"**El error es la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente una consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste".

Tipologías de error en el aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales según Flores et al. (2015)

En esta investigación se tomó como referencia la tipología de errores (Tabla 2 y Tabla 3) considerados por Flores et al. (2015).

- **Errores de comprensión- representación:** Estos tipos de errores se deben a una comprensión inapropiada del problema. Entre ellos se encuentran:

Tabla 3. Errores de comprensión – representación.

ERROR	EJEMPLO	INTERPRETACIÓN
Repetir una de las cantidades propuestas en el problema. Estos errores surgen al tomar como solución uno de los datos proporcionados en el enunciado del problema.	Pedro tiene 7 lápices más que Javier.	El error está en concluir que pedro tiene 7 lápices.
	Hay 72 alumnos en el grado sexto, unos son del grupo A y los otros del B. si hay 38 en el grupo A ¿Cuántos alumnos hay en el grupo B?	El error se produce al interpretar erróneamente que el grupo B tiene 72 alumnos, que es el total de los alumnos de sexto.
Uso inadecuado de palabras clave. Cuando aparecen en el texto palabras como “más, añadir o combinar”, algunos estudiantes concluyen que es un problema “de suma”, al igual que “quitar, eliminar o disminuir” lo identifica con un problema de resta.	Quique tienen 5 lápices. Quique tiene más tres que María. ¿Cuántos lápices tiene María?	El estudiante al leer el término “más” se limita a sumar 5+3.
Operación opuesta. Esta operación consiste en utilizar la operación opuesta a la que es adecuada para resolver el problema.	He añadido 2 patatas a mi plato, ahora tengo 7, ¿cuántas tenía?	El error que comete el estudiante es responder 2+7=9, en lugar de buscar el número que al sumarle 2 da 7.
	Hay 72 alumnos en el grado sexto, unos son del grupo A y los otros del B. si hay 38 en el grupo A ¿Cuántos alumnos hay en el grupo B?	El error que comete el estudiante es responder 72+38=110, en lugar de buscar el número que al sumarle 38 da 72.

Fuente: Adaptado de Flores et al. (2015).

- **Errores de ejecución del algoritmo:** En ocasiones, en la resolución de un problema se elige la operación aritmética apropiada, pero el algoritmo se ejecuta de manera incorrecta. Estos errores suelen corresponderse a dificultades ligadas a los conceptos y procedimientos de las operaciones aditivas. Los errores comunes son:

Tabla 4. Errores de ejecución del algoritmo.

ERROR	**EJEMPLO**	**INTERPRETACIÓN**

Cambio u omisión de los pasos del algoritmo. 300-15=25 Este error se presenta cuando el escolar olvida, o cambia por otro inventado, algún paso del algoritmo.	Escoger dos números cuya división de cero: $1 \div 0 = 0$	El error está en operar con el cero, como si se estuviera multiplicando.
	Escoge dos números cuya suma sea 92: $\begin{array}{r} 69 \\ \underline{+33} \\ 92 \end{array}$	El error del estudiante es que se le olvida el valor agrupado en la suma.

Fuente: Adaptado de Flores et al. (2015).

3.3.2. Competencias Matemáticas

En esta investigación se tomó como referencia la noción de competencia descrita por los Estándares Básicos.“competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” .(MEN, 2006, p. 49).

Al hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo es fundamental que el docente sea activo, crítico, reflexivo e innovador en el proceso de enseñanza- aprendizaje para facilitar la comprensión de los contenidos matemáticos, de tal manera que el estudiante vea la matemática como una actividad humana con significado y no como un proceso mecánico.

Como lo señala el MEN (2006) en Estándares Básicos:

> En la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla. Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos. (p. 49)

3.3.3. Resolución de problemas como competencia matemática

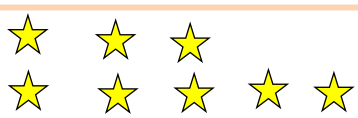
En esta investigación en el aula se tomó la resolución de problemas como competencia matemática teniendo como referencia los Estándares Básicos de MEN (2006), en los cuales se describe:

> La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 48- 55)

De igual manera, en este trabajo se toma la noción de problema y resolución de problema según Bonilla et al (1999):

> Problema es una situación que debe ser modelada, en la cual está presente una pregunta- que se deriva de la misma situación- y el procedimiento y la solución no se obtiene de manera inmediata ni simple, por lo tanto, un problema sería entonces un tema que plantea un reto intelectual al cual el alumno esté dispuesto a dedicarle un tiempo para encontrar la solución.
>
> La resolución de problemas se entiende como un proceso conformado por los diferentes modos de emprender las soluciones a una situación en la que está presente la incertidumbre (algo desconocido), como es el caso de una situación que es un problema. (p. 49)

Tabla 5. Tipos de problemas aritméticos.

Tipo de Problema	**Problema**
Enunciado Verbal	Sandra tiene 16 billetes y se perdieron 7. ¿Cuántos billetes le quedan?
Numérico	Escribe en el espacio un número que sumado con 9 dé como resultado 16. $9 + \boxed{} = 16$
Gráfico	 ¿Cuántas estrellas faltan en la fila de arriba para que en las dos filas haya la misma cantidad de estrellas?

Fuente: Bonilla et al. (1999, p. 51).

3.4. PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En la perspectiva didáctica se expone la resolución de problemas como estrategia de enseñanza (Villalobos, 2008) y se describen las etapas para resolver problemas propuestas por Polya (2005), las cuales fueron tomadas en cuenta por su importancia a la hora de solucionar una situación problema en contexto. También se presenta el marco conceptual que sustenta las estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con las cuales se estructuraron las secuencias didácticas utilizadas en el diseño experimental (Medina, 1998; 2009; Castaño, 1991)

3.4.1. Resolución de problemas como estrategia de enseñanza

En esta investigación se tomó la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, con el fin de poner a prueba los conocimientos matemáticos adquiridos y enfatizar en el desarrollo de habilidades para dar solución a situaciones problema.

Existen investigaciones que resaltan la importancia de situar la resolución de problemas como un aspecto central en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la educación matemática. Por ejemplo, como lo afirma Villalobos (2008):

> Que la resolución de problemas se sitúe como un aspecto central en la enseñanza y el aprendizaje de educación matemática, yace en una concepción particular sobre lo que significa la matemática, y por ende, la propia concepción de cómo debe ser enseñada y aprendida. Sin embargo, no se encuentra ajena a las variaciones de distintas concepciones y visiones. De allí que podemos identificar como mínimo dos grandes visiones, la primera de ellas, se enfoca en una matemática como disciplina, caracterizada por procedimientos infalibles y resultados precisos. Se relaciona con procedimientos adecuados y conceptos matemáticos básicos, manipulados sin mayor significado ni comprensión.
>
> Como visión alternativa, encontramos una concepción de la matemática centrada en lo contextual y significativo, orientada a la construcción social del aprendizaje caracterizada por procesos creativos y generativos. Una matemática que se relaciona con un “hacer” a favor del desarrollo de habilidades y capacidades en los estudiantes, que si bien toma en consideración los conceptos y procedimientos, estos no son los fines primeros de la instrucción.(p. 39)

Al hacer uso de esta competencia el estudiante no se centra en el algoritmo ni en el trabajo mecánico y rutinario, si no en llevar un proceso de reflexión, verificación, justificación y aprendizaje a la hora de resolver una situación problema donde el estudiante tiene presente los conocimientos ya adquiridos y los usa como herramienta para dar solución al problema.

El rol del profesor es de gran importancia en la enseñanza con resolución de problemas, ya que, debe implementar nuevas técnicas para enseñar a pensar, teniendo en cuenta las capacidades del estudiante y el instrumento correcto de evaluación de estas. Coincidiendo con Villalobos (2008), el docente a la hora de enseñar con resolución de problemas debe:

- Trabajar en situaciones de aprendizajes que favorezcan un aprendizaje matemático real y por qué no entretenido, que promueva el pensamiento a niveles de calidad tan deseados hoy en día en educación.

- Poseer el profesor (a), un rol activo y pensamiento creativo a la hora de presentar, elegir o crear un problema matemático a sus estudiantes, acorde con los intereses y necesidades de los mismos. Presentarles problemas matemáticos relevantes y cercanos a su realidad, promueve actitudes activas, que, movidas bajo el desafío de nuevos razonamientos y pensamientos matemáticos, permite situaciones significativas y vínculos afectivos en el aprendizaje.

- El profesor (a) debe aprender y mejorar sus metodologías de enseñanza si quiere ser eficaz en la ayuda y la guía de la tarea que realizan sus estudiantes. Para lo cual se necesita compromiso por parte de los establecimientos y de los profesores (as) hacia la implementación de nuevas metodologías acorde al acelerado ritmo y cambios de hoy en día.

- En la resolución de problemas matemáticos debe existir pertinencia de elección entre el tipo de problema y su significancia de acuerdo a las etapas de desarrollo cognitivo de los estudiantes. (p. 54 -55)

3.4.2. Etapas para resolver problemas propuestas por Polya

Hay cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, cada una con los diferentes interrogantes que se plantea un estudiante a la hora de resolver una situación problema en contexto. (Polya, 2005)

- **Comprender el problema**

- Se debe leer el enunciado despacio.
- ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
- ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)

- Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

- **Trazar un plan para resolverlo**

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
- Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

- **Poner en práctica el plan**

- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.
- Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

- **Comprobar los resultados**

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar la solución?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar alguna otra solución?
- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas. (p. 19)

3.4.3. Estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Las estrategias metodológicas que se tuvieron en cuenta para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa fueron, resolución de problemas con taller constructivo para el grupo experimental y metodología tradicional para el grupo testigo.

- **Modelo pedagógico tradicional o reproduccionista**

Castaño (1991) describe así la metodología tradicional en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: "el maestro, como poseedor del saber, presenta un modelo al estudiante y realiza junto con ellos las actividades necesarias para que éstos lo logren reproducir en los términos en los que le fue presentado". Este esquema se desarrolla en los siguientes momentos: Presentación del modelo por parte del profesor (explicaciones verbales), reproducción del modelo (presenta ejercicios), ejercitación del modelo, aplicación del modelo y evaluación del aprendizaje.

- **El taller constructivo: estrategia para aprender a pensar mediante la construcción del conocimiento matemático**

En esta propuesta didáctica se tuvo en cuenta la estrategia metodológica taller constructivo en el diseño e implementación de las tres secuencias didácticas del grupo experimental para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema.

Medina (2009) desde una perspectiva constructivista para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, expone los siguientes planteamientos sobre la estrategia metodológica del taller constructivo:

> El taller se considera como una estrategia metodológica que sirve de medio interactivo entre el maestro, el conocimiento y los educandos y por tratarse de una construcción colectiva con una doble función: construcción de conocimiento matemático y utilizar la matemática como medio para enseñar a aprender y a pensar se ha denominado ***Taller Constructivo*.**
>
> En este sentido el taller constructivo parte de dos principios básicos:
>
> - La enseñanza que se considera como un proceso intencional y planeado para lograr en los estudiantes esquemas mentales o construcciones necesarias que le permitan acceder al conocimiento y desarrollar su pensamiento matemático.
>
> - El papel del maestro es crear situaciones pedagógicas apropiadas que le permitan al estudiante construir de manera autónoma nuevos conocimientos a partir de los que ya conoce. Estas situaciones le permitirán al estudiante establecer los nexos a manera de puentes cognitivos que le favorecerán el aprendizaje significativo.

> En esta estrategia metodológica se requiere ante todo de un maestro dinámico y reflexivo, su papel debe ser el de dinamizador, mediador, orientador y guía del proceso de aprendizaje. (p. 111,113)

De igual manera el taller constructivo se desarrolla por medio de una secuencia lógica que consta de seis etapas y la evaluación para el proceso de enseñanza – aprendizaje, síntesis en Anexo G. Según Medina (2009) son:

> **Etapa 1. Revisión de conceptos previos, preconcepciones, preteorías.**
>
> El maestro como mediador y catalizador del desarrollo de procesos inicia creando un clima de confianza, cooperación, respeto, que estimule la participación consciente y efectiva de los educandos para incitar el deseo de "saber", "saber hacer" y "saber ser".
>
> Antes de iniciar el proceso de construcción de los nuevos conceptos, se proponen actividades para rescatar preconceptos y preconcepciones que poseen los estudiantes acerca del tema. Ellos inician el trabajo con un esquema cognitivo de algún nivel, es el momento de permitir al alumno la formulación de hipótesis que más adelante se aceptarán o refutarán.
>
> **Etapa 2. Acción + Reflexión = Construcción lógica (Trabajo individual)**
>
> La acción la conforma el conjunto de actividades de aprendizaje que propone el maestro y realiza el alumno bajo su orientación, en forma individual o en pequeños grupos. Tales actividades deben orientarse a desarrollar las funciones cognitivas y operaciones mentales para aprender a pensar y aprender.
>
> La reflexión "flexionar hacia algo, volver hacia algo" será el medio a través del cual se desarrolle el análisis exhaustivo y la resolución de la situación o actividad de aprendizaje. Para esto se requiere de una inmensa actividad por parte del alumno, quien debe establecer múltiples relaciones para cualificar cada vez más su estructura mental.
>
> En esta etapa se adopta el esquema Piagetiano en el cual el conocimiento es el resultado de la acción sobre la realidad, pero no es una mera copia, sino que mediante una actividad lógica o cognitiva: reflexión del individuo que incluye la percepción y elabora una construcción lógica que el alumno efectúa de modo propio.

Etapa 3. Formulación (Fase individual – escrita)

Mediante la reflexión, el alumno redescubre, construye sus propios conceptos y elabora sus propias conclusiones.

En esta etapa no se espera que los conceptos elaborados por los alumnos sean los correctos o los que maneja el profesor, se debe valorar toda producción personal y orientar en caso necesario, no dando respuestas definitivas y absolutas, sino formulando nuevos interrogantes al estilo de la Mayéutica de Sócrates.

Etapa 4. Validación (Confrontación en pequeños grupos o en plenaria)

Es la oportunidad para que el estudiante aprenda a escuchar, argumentar, sustentar su producción cognoscitiva. Adquiere habilidades de comunicación y expresión verbal, emitiendo conceptos y probándolos.

En cada grupo los participantes deben revisar la producción individual y con base en la crítica y el diálogo llegar a un consenso de grupo.

Etapa 5. Formalización.

las actividades realizadas en forma individual o en pequeños grupos deben darse a conocer al grupo total, en sesiones plenarias, en las que se analiza el proceso, las dificultades y los logros, se confrontan resultados, se aclaran dudas, se plantean y resuelven interrogantes, se precisan nociones y conceptos.

En esta etapa un relator de cada grupo o un participante expone, sustentando y argumentando ante los demás la producción del trabajo realizado para confrontar con los resultados de los otros grupos.

La labor del maestro consiste en precisar nociones, conceptos, conclusiones, generalizaciones, unificar la simbología y notaciones según el lenguaje matemático universal, etc. Esto es formalizar el conocimiento construido por los alumnos.

Etapa 6. Aplicación.

Lo ideal y el objeto del taller es que una vez construido el concepto y modificada la estructura cognitiva del estudiante, pueda establecer relaciones y seleccionar los contenidos conceptuales y procedimentales para aplicarlos en nuevas situaciones. Esto es hacer trasferencia de conocimiento a situaciones nuevas.

En esta fase también se pueden formular situaciones, ejercicios, problemas que permitan la ampliación o fijación de los conceptos construidos.

La evaluación en el Taller Constructivo.

La evaluación se considera como un medio para procurar el desarrollo del pensamiento matemático y del individuo, luego debe permitir aproximarse, cometer errores, reflexionar, reconstruir, expresar, sustentar y aplicar conocimiento.

Por lo tanto la evaluación debe estar presente en todo el proceso mediante la observación, diálogo, toma de registros para verificar si el aprendizaje es significativo, si se desarrollan procesos de pensamiento y procesos actitudinales.

En el taller se evalúa el desempeño del alumno y la efectividad del proceso didáctico incluyendo la intervención del maestro. La evaluación se convierte en la revisión autocrítica del proceso y desempeño de cada quien, de los que ha hecho y cómo, los errores cometidos, la forma de corregirlos y las actividades o acciones por cambiar o mejorar. (p. 114 – 117)

4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Este apartado se dedica a presentar la propuesta de enseñanza, describir su estructura y mostrar las Guías de aprendizaje correspondientes a las tres secuencias didácticas que la componen.

4.1. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

El desarrollo de la investigación en el Aula responde a la perspectiva curricular propuesta por el Ministerio de Educación Nacional, y se apoyó teóricamente en los siguientes tópicos de investigaciones en Educación Matemática: análisis del contenido matemático (Rico, Lupiañez, Marín y Gómez, 2007) , las estructuras aditiva y multiplicativa (Vergnaud, 2004), errores asociados a las estructuras aditiva y multiplicativa en situaciones problema (Flores, Castro y Fernández, 2015) y la resolución de problemas matemáticos (Polya, 2005).

Para el diseño de la propuesta de enseñanza, se formuló un objetivo de aprendizaje que se "caracteriza por estar vinculado a un nivel educativo concreto, estar asociado a un contenido matemático concreto y expresar una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario" (González y Gómez, 2013, p. 5). De acuerdo con estas condiciones, se formuló el siguiente objetivo relacionado con la resolución de problemas de estructuras aditivas y multiplicativas.

Objetivo de aprendizaje:

Resolver y formular problemas, a partir de situaciones en contexto escolar o no escolar, identificando y aplicando las estructuras aditiva y multiplicativa.

4.2. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

La propuesta se diseñó teniendo en cuenta los siguientes componentes:

a. **Presentación del tema de la propuesta.** Los temas elegidos fueron las estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema en contexto, debido a que la resolución de problemas es un proceso general de gran importancia para ser matemáticamente competente, de igual manera es fundamental conocer los diferentes tipos de problemas de las estructuras aditiva y multiplicativa, debido a que facilita el análisis y solución de las situaciones problema.

b. **Selección de contenidos.** Los contenidos de esta propuesta de enseñanza (Tabla 6) se sustentan en la perspectiva curricular, análisis del contenido matemático, perspectiva cognitiva y perspectiva didáctica ya mencionados en el marco teórico.

Tabla 6. Contenidos conceptuales y procedimentales.

CONCEPTOS	**PROCEDIMIENTOS**
Estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema	• Reconoce las estructuras aditiva y multiplicativa en las situaciones problema. • Identifica los diferentes tipos de problema de las estructuras aditiva (Combinación, con la incógnita en el todo; cambio de aumento y disminución con la incógnita en la cantidad final; combinación con la incógnita en una parte y comparación de aumento con la incógnita en el comparado) y multiplicativa (Isomorfismo de medidas, suma repetida Incógnita en medida de la segunda magnitud; comparación, aumento con referente desconocido y comparación, aumento con escalar desconocido) • Desarrolla adecuadamente las situaciones problema usando correctamente las estructuras aditiva y multiplicativa. • Comprende el significado de los tipos de problemas aditivos y multiplicativos para dar respuesta a cada situación problema.

Fuente: Autoras.

c. Secuencias didácticas y situaciones de aprendizaje

Esta propuesta de enseñanza se desarrolló en tres fases que son exploración inicial, desarrollo y consolidación. En la segunda se encuentra el diseño de las secuencias según la metodología que cumplen con los referentes teóricos escogidos en esta investigación como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Fases en que se desarrolló la propuesta de enseñanza.

FASES	**METODOLOGÍA**	
	Resolución de problemas con metodología taller constructivo	Tradicional
Exploración inicial	Se aplicó un cuestionario inicial a los grupos experimental y testigo con el fin de identificar los niveles iniciales de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa de los estudiantes de grado sexto.	
Desarrollo	Se realizaron dos secuencias didácticas: • <u>Secuencia 1</u>. Resolución de problemas que involucren la estructura aditiva. • <u>Secuencia 2</u>. Resolución de problemas que involucren la estructura multiplicativa	Se realizaron dos secuencias: • <u>Secuencia 1.</u> Enseñanza de Adición y Sustracción. • <u>Secuencia 2.</u> Enseñanza de Multiplicación y división.
Consolidación En esta fase se combinaron los	<u>Secuencia 3.</u> Resolución de problemas que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa.	<u>Secuencia 3</u>. Combinación de la adición, sustracción, multiplicación y división.

conceptos trabajados en las dos secuencias anteriores.		

Fuente: Autoras

Para el diseño de las secuencias didácticas del grupo experimental se tuvieron en cuenta los tipos de problemas según Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015), planteando situaciones de aprendizaje en contexto para cumplir lo que se pretende con cada actividad. El énfasis de estas secuencias didácticas de enseñanza es la resolución de problemas con metodología taller constructivo, la cual es de gran significancia para ser matemáticamente competente. (Tabla 8)

Tabla 8. Secuencias didácticas resolución de problemas estructurados con la estrategia metodológica taller constructivo.

SECUENCIA	**SITUACIONES DE APRENDIZAJE Situación problema**	**¿QUÉ SE PRETENDE?**
Secuencia 1. Resolución de problemas que involucren la estructura aditiva.	• Clase de matemáticas • Matriculando	Que los estudiantes con ayuda de las etapas de resolución de problemas propuestas por Polya(2005) identificarán los diferentes tipos de problemas aditivos y así aprendan a dar solución a situaciones problema en contexto correctamente.
Secuencia 2. Resolución de problemas que involucren la estructura multiplicativa.	• Día de la familia • Día Deportivo	Que el estudiante aprenda a identificar y a usar los diferentes tipos de problemas multiplicativos para dar solución correcta a situaciones problema utilizando las etapas de Polya(2005), como por ejemplo, el isomorfismo de medidas.
Secuencia 3. Resolución de problemas que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa.	• Formulando situaciones problema	Que los estudiantes formulen y resuelvan una situación problema en contexto partiendo de una expresión matemática con las estructuras aditiva y multiplicativa.
	• Supermercado matemático	Que los estudiantes integren y consoliden los conocimientos y competencias desarrolladas previamente sobre los tipos de problemas aditivos y multiplicativos, en un contexto habitual para ellos.

Fuente: Autoras.

Igualmente se diseñaron tres secuencias con metodología tradicional, para la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y división del grupo testigo. Como se muestra en la Tabla 9.

Tabla 9. Secuencias con metodología tradicional.

SECUENCIAS	SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	¿QUÉ SE PRETENDE?
Secuencia 1. Enseñanza de Adición y Sustracción.	Algoritmo de la adición y sustracción	Que el estudiante identifique y resuelva adecuadamente el algoritmo de la adición y la sustracción
Secuencia 2. Enseñanza de Multiplicación y división.	Algoritmo de la multiplicación y división.	Que el estudiante identifique y resuelva adecuadamente el algoritmo de la multiplicación
Secuencia 3. Combinación de la adición, sustracción, multiplicación y división.	Situación problema incluyendo adición, sustracción, multiplicación y división	Que el estudiante resuelva una situación problema de aplicación de los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división

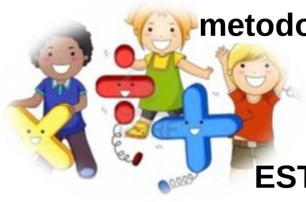
4.3. PROPUESTA SECUENCIAL DE ENSEÑANZA

Para esta investigación se diseñaron tres secuencias didácticas para el grupo experimental al que se le orientó las estructuras aditiva y multiplicativa con resolución de problemas estructuradas con la estrategia metodológica taller constructivo (Anexo H). Según Oicatá y Castro (2013):

> Las secuencias didácticas son un material que facilitará al docente que trabaja reflexiva y críticamente, enriqueciendo sus conocimientos didácticos del contenido matemático, y que ayuda al estudiante a encontrar el sentido y el significado de lo que está aprendiendo. Un propósito que involucra tanto los contenidos a enseñar como la didáctica para hacerlo es orientar los conceptos matemáticos basándose en la resolución de problemas y la indagación. (p. 9)

Igualmente, se diseñaron tres secuencias con metodología tradicional utilizadas en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y división en el grupo testigo.

4.3.1. Guías de aprendizaje con resolución de problemas apoyándose en metodología Taller constructivo



GUÍA DE APRENDIZAJE N° 1

ESTRUCTURA ADITIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Nombre: ____________________ **Grado:** ___**Tiempo**: 120 min **Fecha:** ______

Indicador de desempeño:

- Comprende y aplica la adición y sustracción con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:
De manera ordenada y por parejas desarrollar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

Revisemos conceptos previos

Actividad de aprendizaje: Adivinemos los números que faltan

Encontrar los dos sumandos que cumpla el resultado dado en la adición y el minuendo y sustraendo que cumpla el resultado de la sustracción, en cada una de las operaciones planteadas en el tablero de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} \_\;\_ \\ +\;\;\_ \\ \hline 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \_\;\_ \\ -\;\;\_ \\ \hline 1\;1 \end{array}$$

Según la actividad anterior.

- ¿Encuentra alguna característica común en cada una de las operaciones?
  ____
  ____.

- ¿Conociendo el resultado de las adiciones y sustracciones dadas anteriormente, puede determinar cuántas operaciones se obtienen en cada caso?
  ____
  ____.

Resolvamos la situación problema y reflexionemos

Situación problema N° 1: Clase de Matemáticas

Por parejas resolver la siguiente situación problema:

El día jueves en clase de matemáticas Julián y Andrea ganaron 238 puntos entre los dos, por participar en los ejercicios propuestos. Si Julián ganó 76 puntos ¿Cuánto puntos ganó Andrea? Más tarde Andrea perdió 27 puntos por hacer indisciplina ¿Con cuántos puntos quedo Andrea al finalizar la clase de matemáticas? y si Daniel obtuvo 58 puntos más que Andrea ¿Cuántos puntos ganó Daniel?

Estrategia de solución:

- ¿Cuánto puntos ganó Andrea?

- ¿Con cuántos puntos quedo Andrea al finalizar la clase de matemáticas?

- ¿Cuántos puntos ganó Daniel?

Expresemos y validemos

- ✓ ¿Qué operación u operaciones realizó para desarrollar la situación problema anterior? ¿Por qué?

  ____
  ____.

- ✓ Del planteamiento del problema, ¿Qué palabras clave le indican que la operación a realizar es una sustracción o adición?

  ____
  ____.

- ✓ ¿Cuáles son los términos de la adición y sustracción?

  ____
  ____.

Formalicemos

Responder las siguientes preguntas:

¿Qué se entiende por adición?

____
____
____.

¿Qué se entiende por sustracción?

____
____
____.

¿Qué características le permite identificar las operaciones a realizar en el problema anteriormente desarrollado?

____
____
____.

Formar grupos de dos personas y elegir una balota para solucionar la situación problema correspondiente.

Apliquemos lo aprendido

Situación problema N° 2: Matriculando

La siguiente tabla muestra el recibo de pago para la matrícula de los estudiantes de grado sexto del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino.

	RECIBO DE PAGO 2017		
	Estrato 1 y 2	Estrato 3 y 4	Estrato 5 o más
Asociación de padres	$ 27.000	$ 54.000	$ 81.000
Seguro estudiantil	$ 15.000	$ 30.000	$ 45.000
Club deportivo			
TOTAL	$ 72.000	$ 148.000	$ 216.000

El papá de Andrés en el 2017 pagó $ 148.000 en total por la matrícula, donde se cobraba asociación de padres, seguro estudiantil y club deportivo. Teniendo en cuenta la información de la tabla ¿Cuánto pagó el papá de Andrés por el club deportivo?

Si la mamá de Mariana pagó $68.000 pesos más que el papá de Andrés. ¿Cuánto pagó la mamá de Mariana por la matricula? La asociación de padres organizó una bienvenida para los niños de grado sexto donde gastó $32.000 por cada estudiante matriculado de estrato 5 ¿Cuánto dinero le queda a la asociación de padres por cada estudiante de estrato 5?

Estrategia de Solución

- ¿Cuánto pagó el papá de Andrés por el club deportivo?

- ¿Cuánto pagó la mamá de Mariana por la matricula?

- ¿Cuánto dinero le queda a la asociación de padres por cada estudiante de estrato 5?

GUÍA DE APRENDIZAJE N° 2

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Nombre: ____________________ **Grado:** ___**Tiempo**: 120 min **Fecha:** ______

Indicador de desempeño:

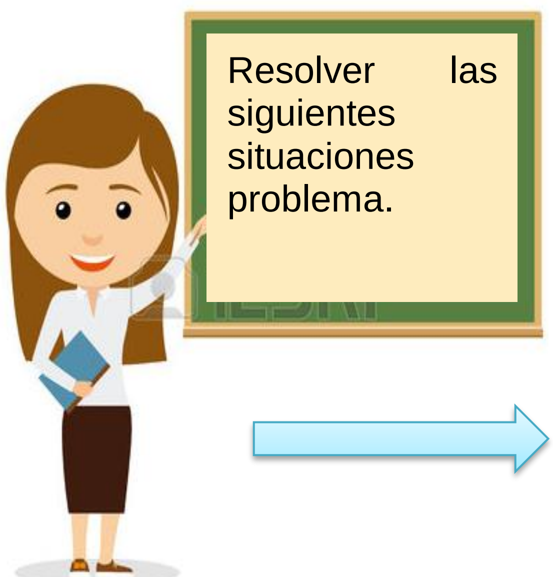
- Comprende y aplica la multiplicación y división con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:
De manera ordenada y por parejas desarrollar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

<u>Revisemos conceptos previos</u>

Actividad de aprendizaje: Interpretando lenguaje matemático



- Ana María tiene $ 2500 y su hermana Juana tiene el doble del dinero que tiene Ana María. ¿Cuánto dinero tiene Juana?

- Si Juan Pablo tiene 81 tasos y tiene 3 veces más que su primo Andrés. ¿Cuántos tasos tiene Andrés?

Resolvamos la situación problema y reflexionemos

Situación problema N° 1: Día de la Familia

La siguiente tabla muestra el menú de los almuerzos del día de la familia en el I.T.S.A.

Almuerzos día de la familia I.T.S.A	
Plato	**Precio**
Fritanga	$ 10.000
Carne a la llanera	$ 18.000
Lechona	$ 15.000
Pechuga al horno	$ 12.000

En el Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino se celebra el día de la familia donde se realizan diversas actividades culturales y se venden almuerzos, en el curso 607 hay 38 estudiantes y cada uno encargó 5 almuerzos. ¿Cuántos almuerzos en total encargó el curso 607?

Si María le pagó a la profesora un valor de $ 72.000 para apartar platos de carne llanera ¿Para cuantas porciones le alcanza? Y el curso 605 encargó el doble de los almuerzos del curso 607. ¿Cuántos almuerzos encargó el curso 605?

Estrategia de Solución:

- ¿Cuántos almuerzos en total encargó el grado 607?

- ¿Para cuantas porciones le alcanza?

- ¿Cuántos almuerzos encargó el grado 605?

Expresemos y validemos

- ✓ ¿Qué operación u operaciones realizó para desarrollar la situación problema anterior? ¿Por qué?

  ____

  ____.

- ✓ Del planteamiento del problema, ¿Qué indica que la operación a realizar son multiplicación o división?

  ____

  ____.

- ✓ ¿Cuáles son los términos de la multiplicación y la división?

  ____

  ____.

Formalicemos

Responder las siguientes preguntas:

¿Qué se entiende por multiplicación?

____

____

____

_______________.

¿Qué se entiende por división?

____

____

____

_______________.

¿Qué características le permite identificar las operaciones a realizar en el problema anteriormente desarrollado?

____

____

____

_______________.

Apliquemos lo aprendido

Situación problema N°2: Día deportivo

Formar grupos de dos personas y elegir una balota para desarrollar la situación problema correspondiente.

En la siguiente tabla se muestra el valor por tallas del uniforme (camiseta, pantaloneta y medias) deportivo para el desfile del día deportivo de los grados sexto, séptimo y octavo de I.T.S.A fabricados por Martha Hernández.

TALLA	PRECIO
10 Y 12	$ 33.000
14 Y 16	$ 38.000

Los grados sexto compraron 120 uniformes, 64 eran de tallas entre 10 y 12 y 56 de talla 14 y 16. ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado sexto?

Si los grados sexto compraron dos veces más uniformes entre las tallas 10 y 12 que los grados octavos ¿Cuántos uniformes de tallas 10 y 12 compraron los grados octavos? . Además, los grados octavo compraron el triple de uniformes de tallas entre 14 y 16 de los grados sexto.

¿Cuántos uniformes de tallas 14 y 16 compraron los grados octavos?, entonces ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado octavo?

Estrategia de Solución:

- ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado sexto?
- ¿Cuántos uniformes de tallas 10 y 12 compraron los grados octavos?
- ¿Cuántos uniformes de tallas 14 y 16 compraron los grados octavos?
- ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de los grados octavo?

GUÍA DE APRENDIZAJE N° 3

ESTRUCTURAS ADITIVA Y MULTIPLICATIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Nombre: ____________________ **Grado:** ___**Tiempo**: 120 min **Fecha:** ______

Indicador de desempeño:

- Comprende y aplica la adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:

De manera ordenada y por parejas desarrollar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

Revisemos conceptos previos

Situación problema N° 1: Olimpiada de matemáticas

La siguiente tabla muestra el número de estudiantes de grado sexto del I.T.S.A. de la sede central que participaron en la olimpiada municipal de matemáticas.

Grado	N° de Estudiantes
605	12
606	9
607	15

¿Cuántos estudiantes de grado sexto se presentaron en total la olimpiada matemática?

Si de los grados decimo se presentaron tres veces más estudiantes a la olimpiada matemática que del grado sexto. ¿Cuántos estudiantes de grado decimo se presentaron?

Estrategia de solución:

- ¿Cuántos estudiantes de grado sexto se presentaron en total la olimpiada matemática?

- ¿Cuántos estudiantes de grado décimo se presentaron?

Formulemos el problema y reflexionemos

Situación problema N° 2:

Plantear una situación problema donde incluya las operaciones de adición, multiplicación y división, luego dar solución a este.

Este problema debe tener una secuencia lógica, debe ser en contexto y debe contener las siguientes operaciones [(12 ÷ 2)+20] X 3, siguiendo el orden establecido según los paréntesis.

Expresemos y validemos

Teniendo en cuenta el problema anteriormente formulado y desarrollado socializarlo con los compañeros luego responder las siguientes preguntas:

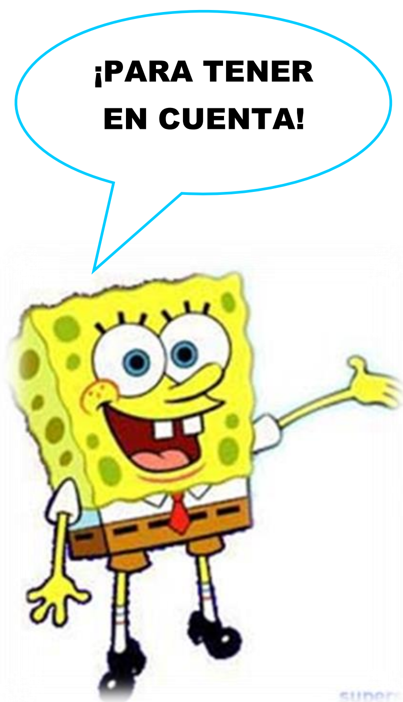
- ✓ ¿Cuál fue el orden en el que se desarrollan las operaciones para dar solución al problema planteado?

  ____
  ____.

- ✓ ¿Qué indica el orden en el que se deben realizar las operaciones?

  ____
  ____.

Formalicemos



Desarrollar las siguientes expresiones e indicar el orden en que se solucionan las operaciones.

- 5 + 4 X 3=
- (10÷ 2) X 5=
- 6 X 10 ÷ 2=

Responder la siguiente pregunta:

¿Qué diferencia encontró al desarrollar las anteriores operaciones?

____
____
____
_______________________________ .

Apliquemos lo aprendido

Situación problema N° 2: Supermercado matemático.

Formar grupos de cuatro estudiantes y comprar los productos indicados en la lista y completar la siguiente tabla.

Grupo 1

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Libros	$ 14400		3 unidades	
Lápices		$500	6 unidades	
Balones	$ 96000		1 unidad	
Naranjas	$5400		4 unidades	
			TOTAL	

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?
- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de las naranjas?
- ✓ Si tienes $10000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto hace falta para para el total de la compra?
- ✓ Si tengo $2250, ¿Me alcanza para comprar 5 naranjas?

Grupo 2

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Cuadernos		$ 2150	3 unidades	
Doritos	$14400		10 unidades	
Manzanas	$7200		6 unidades	
Galletas		$500	1 unidad	
			TOTAL	

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de los cuadernos?

- ✓ Si tienes $5000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto hace falta para para el total de la compra?

- ✓ Si tengo $7200, ¿Me alcanza para comprar 10 manzanas?

Grupo 3

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Libros	$ 14400		2 unidades	
Galletas		$700	7 unidades	
Maní Moto	$ 13200		2 unidades	
Marcadores		$1000	5 unidades	
			TOTAL	

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de las galletas?

- ✓ Si tienes $20000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto dinero le sobra?

- ✓ Si tengo $3500, ¿Me alcanza para comprar 5 galletas?

4.3.2. Secuencias con metodología Tradicional

SECUENCIA Nº1

TEMA: Adición y Sustracción de Números Naturales

Pensamiento numérico

Estándar básico:
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de logro:

- Resuelve Sumas entre números Naturales.

Tiempo: 120min

I. CONCEPTO MATEMÁTICO

Los ejercicios y problemas planteados en esta secuencia son adaptados de Rueda (2007)

ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES	
Adición agrupando	Adición si agrupar
Ejemplo: $\begin{array}{r} 236 \\ \underline{+29} \\ 265 \end{array}$	Ejemplo: $\begin{array}{r} 13620 \\ \underline{+25276} \\ 38896 \end{array}$

- **<u>Ejercicios</u>**

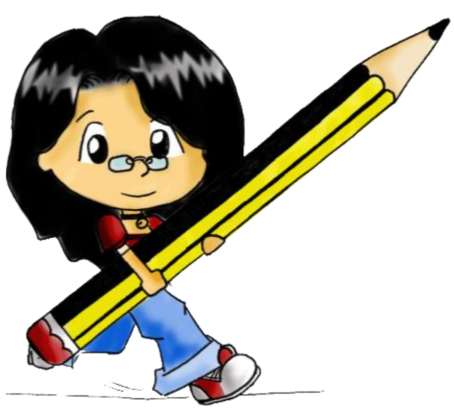
$\begin{array}{r} 12236 \\ \underline{+9678} \\ 21915 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23251 \\ \underline{+1220} \\ 24471 \end{array}$	$\begin{array}{r} 120000 \\ \underline{+19820} \\ 139820 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9786 \\ \underline{+9678} \\ 19464 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1'223.612 \\ \underline{+\quad 38000} \\ 1'261612 \end{array}$	$\begin{array}{r} 100000 \\ \underline{+87000} \\ 187000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 78965 \\ \underline{+12090} \\ 91057 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45600 \\ \underline{+36200} \\ 81800 \end{array}$

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES	
Sustracción sin desagrupar	Sustracción desagrupando
Ejemplo: $\begin{array}{r} 86532 \\ -62430 \\ \hline 24102 \end{array}$	Ejemplo: $\begin{array}{r} 124653 \\ -\ \ 98469 \\ \hline 26184 \end{array}$
Comprobación: **La sustracción se comprueba por medio de la operación inversa (la adición)** **Ejemplo:** $\begin{array}{r} 24102 \\ +62430 \\ \hline 86532 \end{array}$ $\begin{array}{r} 26184 \\ +98469 \\ \hline 124653 \end{array}$	

Los términos de la resta son minuendo, sustraendo y diferencia.

$$\begin{array}{rl} & 7589 \rightarrow \text{minuendo} \\ - & 3712 \rightarrow \text{sustraendo} \\ \hline & 3877 \rightarrow \text{resto o diferencia} \end{array}$$

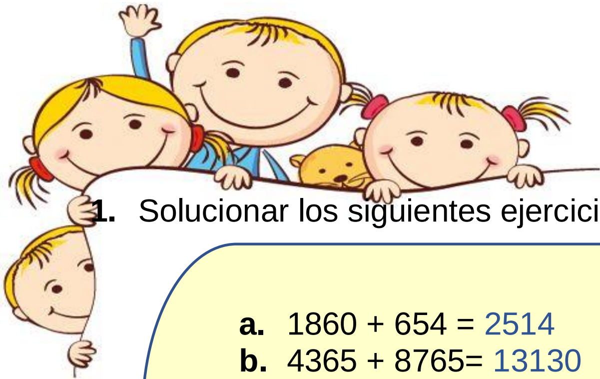
Ejercicios:



$$\begin{array}{r} 12236 \\ -9678 \\ \hline 2558 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23251 \\ -1220 \\ \hline 22031 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120000 \\ -19820 \\ \hline 100180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9786 \\ 9678 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1'223.612 \\ -\quad 38000 \\ \hline 1'185612 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100000 \\ -87000 \\ \hline 13000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 78965 \\ -12090 \\ \hline 66875 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45600 \\ -36200 \\ \hline 9400 \end{array}$$

II. EVALUACIÓN



1. Solucionar los siguientes ejercicios.

a. 1860 + 654 = 2514
b. 4365 + 8765= 13130
c. 1786000 + 43200= 1829200
d. 186 – 32 = 154
e. 43650 – 1556= 42094
f. 1780 – 1009= 771

2. Hallar el término que cumple la igualdad.

a. 234 + 302 = 536
b. (97 + 3) + 1000= 1100
c. 136 + (36 + 663) = 835
d. 430 + 173 = 603
e. 234 – 26 = 208234 + 302 = 536

3.

En la librería Evolución venden textos escolares de sexto, el libro de matemáticas tiene un precio de $42.550, el de español $ 39.900, el de inglés $37.525, el de sociales $34.100 y el de religión $21.900.

a. Si Angélica debe comprar los cinco textos, ¿Cuánto debe pagar por ellos?
42550 + 39900 +37525+ 34100+21900= 175975
R/ Angélica debe pagar $175975 por los libros.

b. Si Angélica debe comprar el texto de matemáticas y español. ¿Cuánto debe pagar por ellos?
Solución:
42550 +39900 = 82450
R/ Angélica debe pagar $ 82450 por los dos libros.

c. Si tú debes comprar todos los textos menos el de inglés, ¿Cuánto debe pagar por ellos?
Solución:
42550 + 39900 + 34100+21900= 138450
R/ Angélica debe pagar $138450 por los libros.

d. ¿Cuánto más cuesta el libro de matemáticas que el de inglés?
Solución:
42550 – 37525= 5025
El libro de matemáticas cuesta $ 5025 más que el de ingles

e. Si Angélica tiene $250000 para comprar los 5 libros ¿Cuánto dinero le quedará después de la compra?
Solución:
42550 + 39900 + 37525 + 34100+21900= 175975
250000-175975= 74025
A Angélica le quedara $ 74025

RERERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Rueda, F. (2007). Adición y sustracción de números naturales. Matemáticas.(p. 16-18). Bogotá: Santillana.

SECUENCIA Nº2

TEMA: Multiplicación y división de Números Naturales

Tiempo: 120min

Pensamiento numérico

Estándar básico:
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de logro:

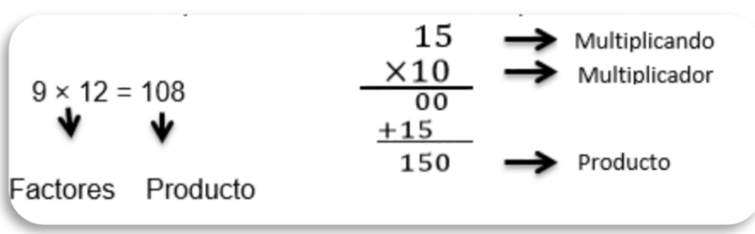
- Resuelve multiplicación entre números naturales.

Los ejercicios y problemas planteados en esta secuencia son adaptados de Rueda (2007)

I. CONCEPTO MATEMÁTICO

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES: Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se define la multiplicación o producto como $a \times b = c$ donde a y b se denominan factores y c producto.

Los términos que intervienen en una multiplicación son:



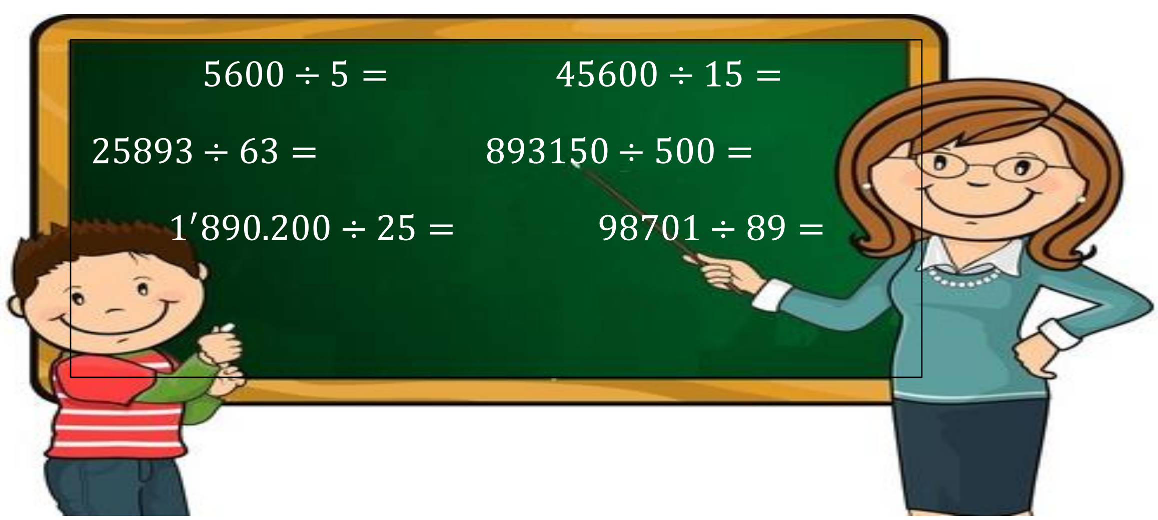
Para indicar esta operación se utiliza entre otros el signo ×, que se lee "por" y se coloca entre los números a multiplicar.
Ejemplo: 9 × 12 ó (9) (12) se lee nueve por doce.

Ejercicios:

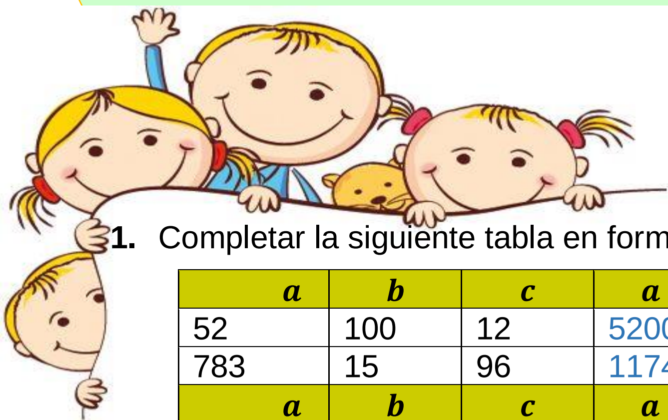
$12456 \times 120 =$	$45679 \times 56700 =$	$123400 \times 700 =$
$2'251.789 \times 20 =$	$23458 \times 4000 =$	$678900 \times 1205 =$

DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES **En la división se presentan dos casos dependiendo del residuo**	
División exacta	**División inexacta**
La división exacta es la operación inversa a la multiplicación, ya que conocidos el producto y uno de los factores, esta permite halla el otro factor. Una división exacta cuando existe un número natural que multiplicado por el divisor como resultado el dividendo. Así, Dados $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{N}$, se define la división exacta como $\boldsymbol{a \div b = c \text{ siempre que } a = b \times c}$ $\boldsymbol{a \text{ se denomina dividendo}, b \text{ divisor y } c \text{ cociente. En este caso, el residuo de la división es cero.}}$	Una división es inexacta cuando no existe un número natural que multiplicada por el divisor dé como resultado el dividendo. Así, Dados $a, b, c, r \in \mathbb{N}$, se define la división inexacta como $\begin{array}{l\|l} a & b \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$ Siempre que $a = b \times c + r$ a *se denomina dividendo*, b *divisor y* c *cociente y* r *residuo. En este caso, el residuo de la división es diferente a cero.*
Por ejemplo $\mathbf{24 \div 8 = 3}$, Ya que $3\mathbf{3} \times \mathbf{8} = \mathbf{24}$. Así, 24 es el dividendo, 8 el diviso y 3 el cociente.	Por ejemplo, $\begin{array}{l\|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array}$ En este caso, $27 = (4 \times 6) + 3$, 27 *es el dividendo*, 4 *el divisor*, 6 *el cociente y* 3 *el residuo*.

Ejercicios:



II. EVALUACIÓN



1. Completar la siguiente tabla en forma abreviada

a	b	c	$a \times b$	$b \times c$	$a \times c \times 10$
52	100	12	5200	1200	6240
783	15	96	11745	1440	751680
a	b	c	$a \div b$	$b \div c$	
144	12	3	12	4	
456	114	6	4	19	

Hallar el término que cumple la igualdad.

a. $38 \times 9 = 342$
b. $5 \times 75 = 375$
c. $9 \times 56 = 504$
d. $121 \div 11 = 11$
e. $330 \div 3 = 110$
f. $250 \div 5 = 50$

2. En la ciudad de Tunja hay 5 pistas automovilísticas, la pista 1 tiene una longitud de 2.387m, la pista 2 3.224 m, la pista 3 4.365m, la pista 4 1.913m y la pista 5 tiene una longitud de 5.429m

¿Cuántas vueltas da un automóvil al recorrer 19344 en la pista 2?
$19344 \div 3224 = 6$
¿Cuántos metros recorrerá un automóvil si da nueve vueltas en la pista 3?
$4365 \times 9 = 39285$, R/recorre 39285 metros.

¿Cuántos metros más recorre un automóvil que da seis vueltas en la pista 5, que otro automóvil que da tres vueltas en la pista 1?
$5429 \times 6 = 8574$
$2387 \times 3 = 7161$
8574 – 7161= 1413, R/ recorre 1413 metros más.

RERERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Rueda, F. (2007). Adición y sustracción de números naturales. Matemáticas.(p. 16-18). Bogotá: Santillana.

SECUENCIA N°3

TEMA: Adición, sustracción, multiplicación y división de Números Naturales

Tiempo: 120min

Pensamiento numérico

Estándar básico:

Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de logro:

- Resuelve adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales.

I. CONCEPTO MATEMÁTICO

Los ejercicios y problemas planteados en esta guía son adaptados de Rueda (2007)

<table>
<tr><th colspan="2">SOLUCIÓN DE EXPRESIONES ARITMÉTICAS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Una expresión aritmética es aquella en la que se combinan números naturales mediante diversas operaciones. Para resolver expresiones aritméticas se deben tener en cuenta los siguientes casos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para resolver una expresión sin signos de agrupación</td></tr>
<tr><td>Primero se deben resolver las multiplicaciones y divisiones indicadas en su orden respectivo. Luego se resuelven las sumas y restas correspondientes de izquierda a derecha.</td><td>Si coinciden varios operadores de igual prioridad en una expresión aritmética el orden de ejecución es de izquierda a derecha.</td></tr>
<tr><td><u>Ejemplo</u>: $9 \times 5 + 18 \div 3 - 6 \times 5$
$= 45 + 6 - 30$
$= 21$</td><td><u>Ejemplo</u>: $8 \times 5 \div 2$
$= 40 \div 2$
$= 20$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para resolver una expresión con signos de agrupación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estos se deben eliminar de adentro hacia afuera para esto se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos. Con el propósito de evitar confusiones se pueden utilizar diferentes signos de agrupación: ( ), [ ], { }.</td></tr>
</table>

Operador	Operación	Ejemplos	Prioridad
$+$	Suma	$a+b$	2
$-$	Resta	$a-b$	
$\times$, $\cdot$, $*$	Multiplicación	$a\times b$, $a\cdot b$, $a*b$	1
$\div$, $/$	División	$a\div b$, a/b	

Ejemplo: $15+[9\div(11\times 2-19)]$
$= 15+[9\div(22-19)]$
$= 15+[9\div 3]$
$= 15+3$
$= 18$

II. EVALUACIÓN

1. Resolver las siguientes expresiones

a. $8\times 5+54\div 6-10\times 3+121\div 11=30$
b. $12\times 3\div 2+21\div 3\times 5-9\times 5\div 15=50$
c. $100-\{65-[16\times(12\div 3)]\}=99$
d. $[(63\div 7+11)-(7\times 4-8)]+19=19$

2. Situación Problema

Un estanque se va a llenar con el agua que surten dos llaves. La primera llave vierte 15 litros de agua por minuto y la segunda vierte 20 litros de agua por minuto. Si el estanque tiene una capacidad de 1500 litros y además, un desagüe por el que salen 25 litros de agua por minuto. Plantear y resolver una expresión aritmética que indique la cantidad de horas que se necesita para llenar el estanque

$$1500\div(15+20-25)=150$$

La cantidad de horas que se necesita para llenar el estanque es de 2 horas y media o 150 minutos.

RERERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Rueda, F. (2007). Adición y sustracción de números naturales. Matemáticas.(p. 16-18). Bogotá: Santillana.

5. RESULTADOS

Esta sección corresponde al desarrollo de la segunda y tercera etapa del diseño de experimentos, es decir, el análisis e interpretación de los datos. Por lo tanto, se describe el resultado del análisis cuantitativo de los datos obtenidos apoyándose en el resultado del análisis cualitativo de cada uno de los grupos con los que se realizó esta investigación. Igualmente, se desarrolla en dos apartados, descripción de los datos y prueba de las hipótesis estadísticas.

Para la toma de datos, en primer lugar se aplicó un cuestionario inicial a cada grupo, luego se sistematizaron las tres secuencias didácticas dependiendo de la metodología utilizada y al terminar la ejecución de la propuesta de enseñanza se aplicó un cuestionario final. La información recopilada mediante la aplicación de estos instrumentos (Anexo I) fue evaluada por medio de la rúbrica planteada en esta investigación, teniendo en cuenta la escala de evaluación utilizada en el ITSA siendo 1,0 la mínima calificación y 10,0 la valoración máxima, con el fin de hacer una valoración cuantitativa, la cual se complementa con análisis cualitativo de la información obtenida.

Es importante tener presente los criterios y la valoración cuantitativa de cada nivel de la competencia de resolución de problemas, como se muestra en la Tabla 10.

Tabla 10. Síntesis de la rúbrica para evaluar la competencia de resolución de problemas

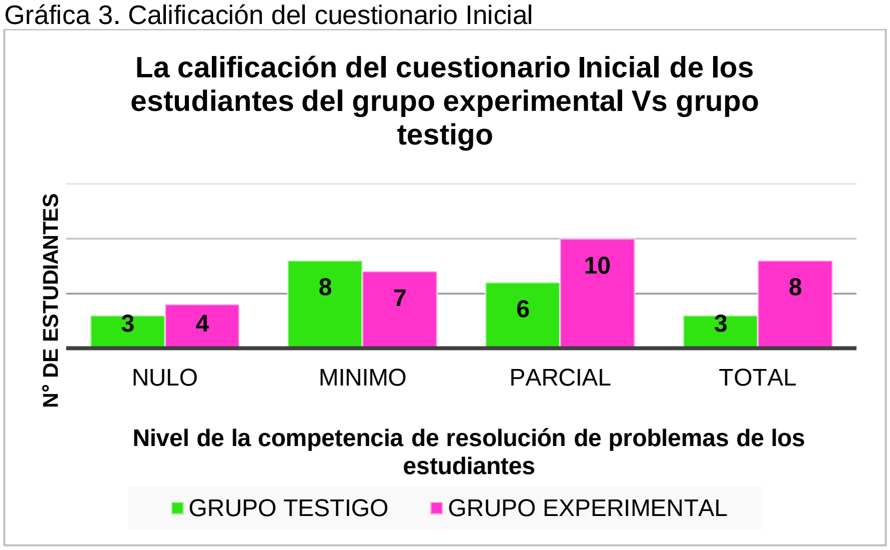
Estructura	**Criterio**	**Nivel**	**Valoración**
Aditiva (Adición y sustracción)	Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos de combinación y comparación en diferentes contextos.	Total	8 – 10
Multiplicativa (Multiplicación y división)	Interpreta, formula y resuelve problemas multiplicativos de comparación, isomorfismos en diferentes contextos.	Parcial Mínimo	6 - 7.9 3 - 5.9
Combinación (Adición, sustracción, multiplicación y División)	Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos y multiplicativos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos.	Nulo	1-2.9

5.1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

La población objetivo está constituida por 76 estudiantes de grado sexto del ITSTA. Se tomaron los 38 estudiantes del curso 605 como grupo testigo y los 38 del curso 607 como grupo experimental; sin embargo, por no haberse presentado asistencia a todas las sesiones establecidas, se descartaron los estudiantes que no asistieron a al menos una sesión, quedando 51 unidades experimentales (21 para el grupo testigo y 30 para el grupo experimental).

En la Gráfica 3 se muestran los niveles iniciales de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa, calificaciones obtenidas por los estudiantes de los cursos 605 y 607 en el cuestionario inicial.

Gráfica 3. Calificación del cuestionario Inicial



Fuente: Autoras

La Gráfica 3 muestra que el mayor número de estudiantes del grupo testigo con metodología tradicional (ocho estudiantes) están en el nivel mínimo de competencia de resolución de problemas con una valoración cuantitativa entre 3,0 y 5,9. En el grupo experimental el mayor número de estudiantes están en el nivel parcial de la competencia de resolución de problemas (diez estudiantes), con una valoración cuantitativa entre 6,0 y 8,0.

Analizando los estadísticos descriptivos de los datos en la Tabla 11, es decir, de las calificaciones obtenidas por los estudiantes tanto del grupo experimental como del grupo testigo de cada uno de los instrumentos de recolección utilizados para esta investigación, se evidencia que la media global de la nota promedio de las calificaciones de los estudiantes del grupo experimental de las tres secuencias desarrollas que manejó resolución de problemas estructuradas con la estrategia metodológica taller constructivo, es de 7,0 y del grupo testigo con metodología tradicional es de 5,43, por lo tanto, se puede afirmar que los estudiantes del grupo experimental tienen un nivel parcial de la competencia de resolución de problemas y los estudiantes del grupo testigo se encuentran en un nivel mínimo de esta competencia.

Igualmente, se observa que los estudiantes del grupo experimental obtienen una calificación promedio de 6,34 en el cuestionario inicial y en el cuestionario final tienen una calificación promedio de 6,48, manteniéndose en un nivel parcial en la competencia de resolución de problemas después de haberse desarrollado esta propuesta de enseñanza. El grupo testigo inició con una calificación promedio de 5,348 y terminó con una calificación media de 4,6 en el cuestionario final, por lo tanto, se evidencia que el grupo testigo se mantuvo en el nivel de competencia mínimo aunque terminando con una calificación menor.

Tabla 11. Estadísticos descriptivos metodología tradicional y resolución de problemas con metodología taller constructivo.

Estadísticos descriptivos								
	Resolución de problemas con metodología taller constructivo (Grupo experimental- 607)				**Metodología Tradicional (Grupo testigo-605)**			
	N	Mínimo	Máximo	Media	N	Mínimo	Máximo	Media
Calificación Cuestionario Inicial	29	1,0	8,9	6,348	21	1,0	10,0	5,348
Calificación Estructura Aditiva	30	1,0	10,0	5,823	21	3,0	10,0	6,786
Calificación Estructura Multiplicativa	30	1,0	10,0	7,313	21	1,0	9,0	3,705
Calificación Combinación estructuras	30	1,0	10,0	7,733	21	1,0	10,0	5,805
Calificación promedio de las secuencias	30	1,80	10,00	7,0	21	2,30	9,70	5,433
Calificación Cuestionario Final	30	1,0	10,0	6,840	21	1,0	10,0	4,600

Fuente: Autoras

5.2. PRUEBA DE LAS HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

Las hipótesis se plantearon para determinar el efecto en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas al proponer e implementar situaciones problema que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales al grupo experimental, teniendo en cuenta las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el cuestionario final y las calificaciones promedio de las tres secuencias aplicadas a cada uno de los estudiantes de los grupos.

Para juzgar que al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales, hipótesis planteada en esta investigación, se propusieron las siguientes hipótesis estadísticas:

- Ho: La calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final es igual a la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final.
  vs
  Ha: La calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final es diferente a la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final

- Ho: La media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es igual a la media de la calificación promedio del desempeño los estudiantes del grupo testigo.
  vs
  Ha: La media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es diferente a la media de la calificación promedio del desempeño los estudiantes del grupo testigo.

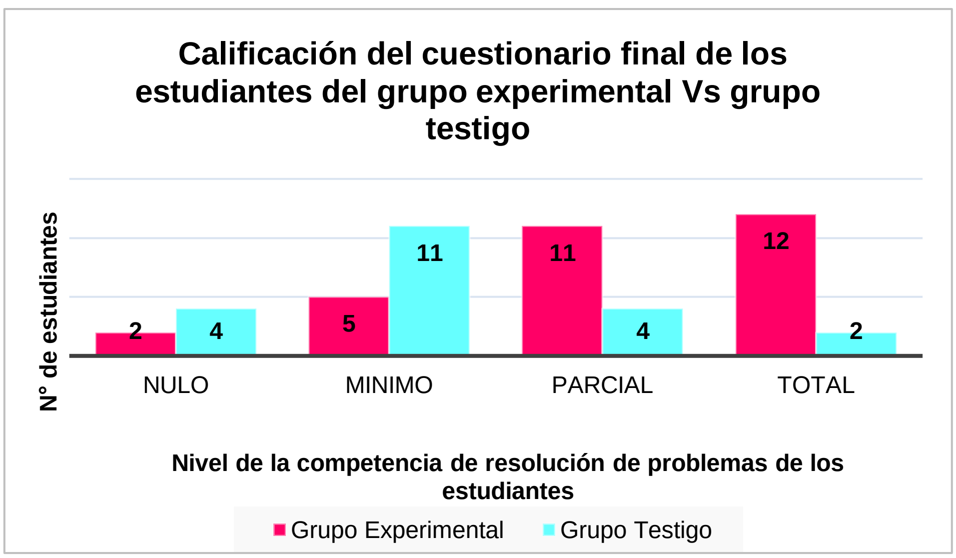
Para juzgar cada hipótesis estadística se realizó la prueba de diferencia de medias de TUKEY logrando identificar si la diferencia es o no significativa, es decir, si al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo o negativo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales. Antes de usar la prueba de TUKEY, fue necesario realizar un análisis exploratorio de los datos, la prueba de normalidad de Shapiro – Wilk para contrastar la normalidad de las variables respuesta y la prueba de homocedasticidad, debido a que, si la variable no tiene una distribución normal y no hay homocedasticidad, no se puede utilizar la prueba de TUKEY.

5.2.1. Calificación del desempeño de los estudiantes en el cuestionario final dependiendo de la metodología de enseñanza usada en cada grupo

En esta investigación, se aplicó un cuestionario final después de desarrollar las secuencias en el grupo experimental y en el grupo testigo con la metodología correspondiente. En la Gráfica 4 se presenta el análisis de la calificación obtenida por cada estudiante, donde se evidencia que 11 de los 21 estudiantes del grupo testigo se encuentran en nivel mínimo de la competencia de resolución de problemas y la mayoría de los estudiantes del grupo experimental se encuentran en los niveles parcial y total de esta competencia.

Comparando estos resultados con las calificaciones obtenidas en el cuestionario inicial (Gráfica 3), se puede concluir que hubo un avance en el nivel de la competencia de los estudiantes del grupo experimental, debido a que la frecuencia de alumnos que se encontraban en nivel nulo y mínimo disminuyo y el número de estudiantes en el nivel parcial y total aumentó.

Gráfica 4. Calificación del cuestionario final.



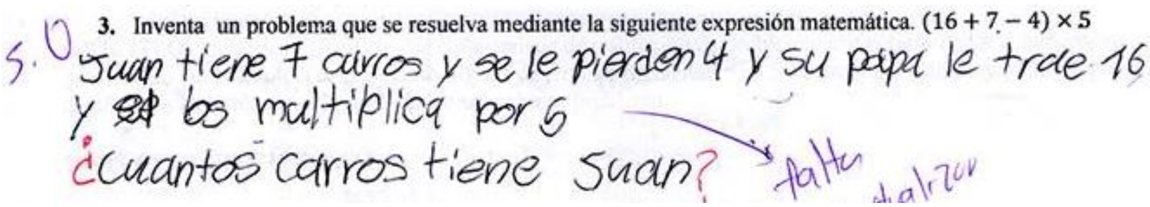
Fuente: Autoras

Con el fin de apoyar los resultados expuestos en la Gráfica 4 se realizó un análisis cualitativo de los estudiantes en el cuestionario final, el cual también muestra la diferencia en el nivel de la competencia de resolución y formulación de problemas de los estudiantes del grupo testigo y del grupo experimental. Para esto, se tomó como referencia el numeral tres del cuestionario final en donde se evaluó la formulación y resolución de problemas como uno de los procesos generales para ser matemáticamente competente descritos en los estándares básicos del

MEN(2006). En este se les pedía formular y resolver un problema según la expresión matemática $(16+7-4)\times 5$

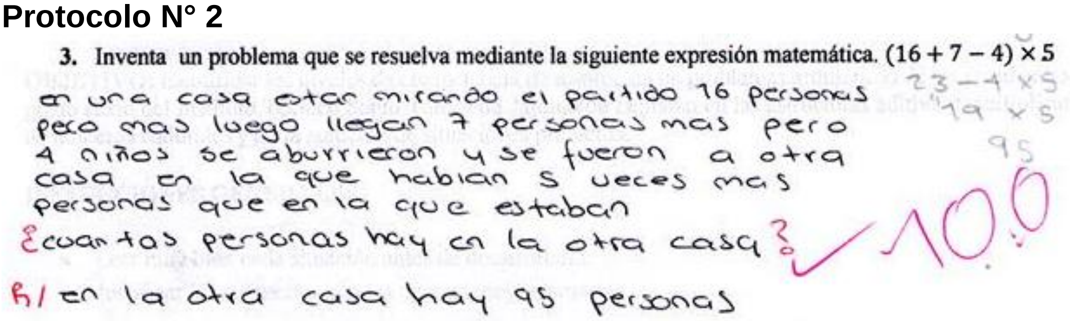
Teniendo en cuenta la Rúbrica de evaluación, el estudiante del grupo experimental que planteó el problema, como se evidencia en el Protocolo N° 2, se encuentra en el nivel total de la competencia resolución de problemas, debido a que, interpreta, formula y resuelve adecuadamente situaciones problema en contexto combinando las dos estructuras aditiva y multiplicativa, identificando y usando las estructuras correspondientes. Por el contrario el estudiante del grupo testigo que planteó el problema según el Protocolo N°1, está en el nivel mínimo de esta competencia, ya que, desarrolla adecuadamente las adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones pero no formula correctamente la situación problema en contexto.

Protocolo N° 1


3. Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática. $(16+7-4)\times 5$

5.0 Juan tiene 7 carros y se le pierden 4 y su papa le trae 16 y ~~se~~ los multiplica por 5 ¿Cuantos carros tiene Juan? falta

Protocolo N° 2


3. Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática. $(16+7-4)\times 5$

en una casa estan mirando el partido 16 personas pero mas luego llegan 7 personas mas pero 4 niños se aburrieron y se fueron a otra casa en la que habian 5 veces mas personas que en la que estaban

¿cuantas personas hay en la otra casa?

R/ en la otra casa hay 95 personas

23 − 4 × 5
19 × 5
95

10.0

Igualmente, se fijó un modelo estadístico que tiene como variable respuesta, la calificación del cuestionario final obtenida por cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA para probar si al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

$$\boldsymbol{Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, 51}$$

$\boldsymbol{Y_{ij}}$: La calificación del desempeño de cada estudiante en el cuestionario final cursos 605 y 607 del ITSTA

$\boldsymbol{\mu}$: Efecto constante, común a todos los niveles. Media global.

$\boldsymbol{\tau_i}$: Tratamientos $\begin{cases} \boldsymbol{\tau_1}: \text{Metodología Tradicional} \\ \boldsymbol{\tau_2}: \text{Resolución de problemas con metodología Taller constructivo} \end{cases}$

$\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$: Error experimental

- **Análisis exploratorio**

Se realizó un análisis exploratorio a la variable respuesta, es decir, a la calificación del desempeño por cada estudiante en el cuestionario final por grupo, con el fin de comprobar si los datos cumplen con los supuestos para poder realizar el juzgamiento de la hipótesis por medio de la prueba de TUKEY.

Tabla 12. Análisis descriptivo

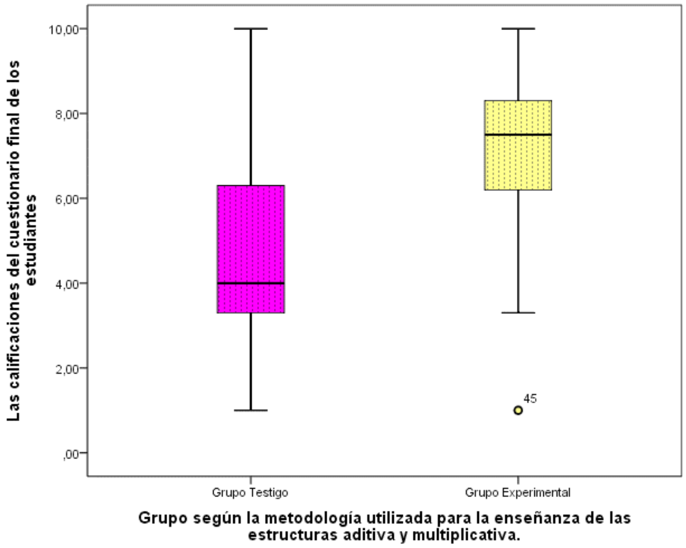
Grupo Testigo	**Grupo Experimental**

Descriptivos Grupo Testigo	
	Estadístico
Media	4,600
C.V.	49,558
Mediana	4,000
Desviación	2,280
Rango	9,0
Asimetría	0,720
Curtosis	0,241

Descriptivos Grupo Experimental	
	Estadístico
Media	6,840
C.V.	31,346
Mediana	7,300
Desviación estándar	2,1441
Rango	9,0
Asimetría	-0,983
Curtosis	0,746

Debido a que la asimetría y curtosis son mayores que cero se puede afirmar que las calificaciones del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final están cercanos a la media global con una mayor frecuencia en notas inferiores a la media.	Como la asimetría es menor a cero y la curtosis es mayor que cero, las calificaciones del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final están cercanos a la media global con una mayor frecuencia en notas superiores a la media.

Gráfica 5. Las calificaciones del cuestionario final de los estudiantes



En la Gráfica 5 se observa que la mitad de los estudiantes del grupo testigo tienen una calificación del desempeño en el cuestionario final por debajo de 4,0, es decir, un nivel mínimo de la competencia resolución de problemas y la mitad de los estudiantes del grupo experimental tiene una calificación del cuestionario final por encima de 7,0, por lo tanto, se encuentran en un nivel parcial de esta competencia.

Igualmente, se puede afirmar que hay menos dispersión en el grupo experimental que en el grupo testigo, con calificaciones entre 3,0 y 10,0, con un caso atípico de un estudiante que se encuentra en el nivel mínimo de la competencia resolución de problemas con una calificación de 1,0.

- **Prueba de normalidad de Shapiro - Wilk**

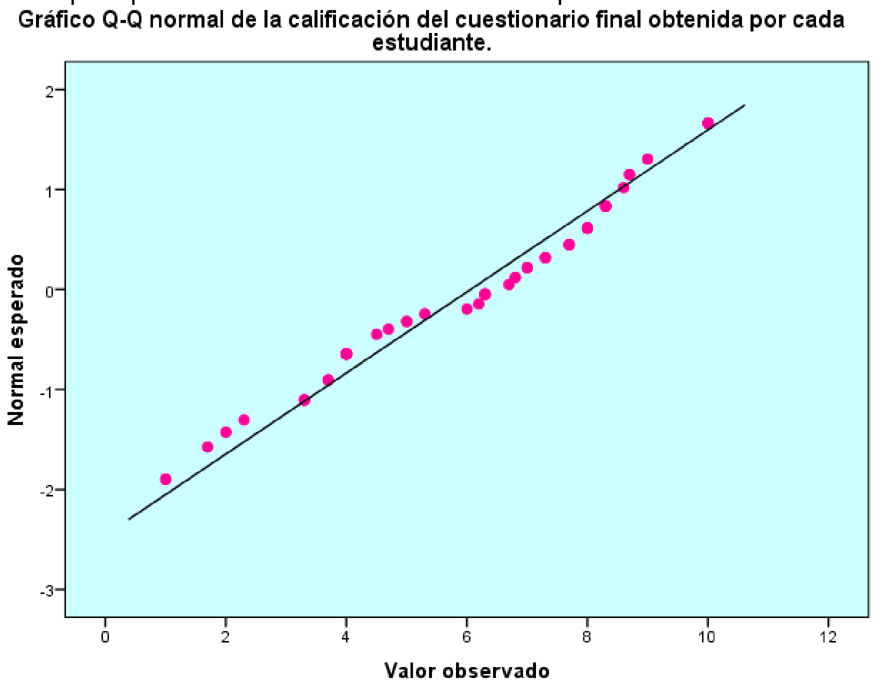
$$\begin{cases} \text{Ho: La calificación del desempeño de cada estudiante en el cuestionario final} \\ \text{sigue una distribución normal.} \\ \text{vs} \\ \text{Ha: La calificación del desempeño de cada estudiante en el cuestionario final} \\ \text{no sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

Tabla 13. Prueba de normalidad

Pruebas de normalidad Shapiro-Wilk		
Estadístico	gl	Sig.
0,958	51	0,069

Con un tamaño del efecto de la prueba de 0,069 (Tabla 13) y un nivel de significancia del 0,05 no se rechaza la hipótesis nula, debido a que, el tamaño del efecto de la prueba> α, por lo tanto, la calificación del desempeño de cada estudiante en el cuestionario final se aproxima a una distribución normal.

Gráfica 6. Gráfico para probar normalidad de la variable respuesta.



De igual manera, como se observa en la Gráfica 6 que los puntos se sitúan cerca de la diagonal, se puede decir que se acerca a la normalidad.

- **Prueba de Homocedasticidad**

Ho: La varianza de la calificación del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final es igual a la varianza de la calificación del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final.

vs

Ha: La varianza de la calificación del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final no es igual a la varianza de la calificación del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final.

Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error (Variable dependiente: Cuestionario Final**)**			
F	df1	df2	Sig.
0,096	1	49	0,757

Con un tamaño del efecto de la prueba de 0,757 y un nivel de significancia del 0,05 no se rechaza la hipótesis nula, debido a que, el tamaño del efecto de la prueba> α, por lo tanto, hay homocedasticidad (las varianzas son iguales).

Hipótesis.

$$\begin{cases} \text{Ho: La calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el} \\ \text{cuestionario final es igual a la calificación promedio del desempeño} \\ \text{de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final.} \\ \text{vs} \\ \text{Ha: La calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el} \\ \text{cuestionario final es diferente a la calificación promedio del desempeño} \\ \text{de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final} \end{cases}$$

Para juzgar la hipótesis se realizó la prueba diferencia de medias de TUKEY logrando identificar si la diferencia es o no significativa.

Como se comprobó que la la calificación del desempeño por cada estudiante en el cuestionario final se aproxima a una distribución normal y hay homocedasticidad, se puede realizar la prueba de diferencia de medias de Tukey, con el fin, de probar si la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final es igual a la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final, es decir, que al haber orientado las estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema se logró un efecto en el nivel de la competencia resolución de problemas en los estudiantes del grupo experimental.

- **Prueba de Tukey**

Hipótesis

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ Vs \\ \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

μ_1= la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final.

μ_2= la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final

Para poder realizar la prueba de Tukey se usa la ANOVA (Tabla 14), donde se obtiene el valor del CME (cuadrado medio del error) y así poder hallar diferencia mínima significativa o comparador ($\mathbf{W_{ij}}$) con un nivel de significancia de 0,05, luego se calcula la diferencia de medias y se realiza la comparación con el valor de $\mathbf{W_{ij}}$.

Tabla 14. ANOVA

ANOVA					
Resultado Final					
	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	76,180	1	76,180	16,349	,000
Dentro de grupos	228,322	49	4,660		
Total	304,502	50			

Fuente: Autoras

Comparador ($\mathbf{W_{ij}}$): Es la diferencia mínima significativa que se compara con la diferencia de medias del grupo testigo contra el grupo experimental, para determinar si esta es significativa o no.

$$\mathbf{W_{ij}} = \mathrm{q} \times \sqrt{\frac{\mathrm{CME}}{2} \times \left[\frac{1}{\mathrm{n_i}} + \frac{1}{\mathrm{n_j}}\right]}\ , \begin{cases} \mathrm{q}_{(2,50,0,05)} = \text{valor en la tabla de tukey} \\ \mathrm{CME} = \text{Cuadrado medio del error} \\ \mathrm{ni} = \text{Tamaño del grupo testigo} \\ \mathrm{nj} = \text{Tamaño del grupo Experimental} \end{cases}$$

$$\mathbf{W_{ij}} = 2{,}83 \times \sqrt{\frac{4{,}660}{2} \times \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{30}\right]} = \mathbf{1{,}2290773}$$

Tabla 15. Diferencia de medias. .

	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	$\lvert\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}\rvert$	**Error estándar**	**Comparador**
Grupo 1 (Testigo) contra 2(Experimental)	21	30	$\lvert 4{,}60 - 7{,}0833\rvert = 2{,}483$	0,434302	1,2290773

Fuente: Autoras

Como el valor de la diferencia de medias del grupo testigo contra el grupo experimental es mayor que el comparador; 2,483 > 1,2290773 se obtiene una diferencia significativa, por lo tanto, no se acepta Ho, es decir, la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental en el cuestionario final es diferente a la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo en el cuestionario final.

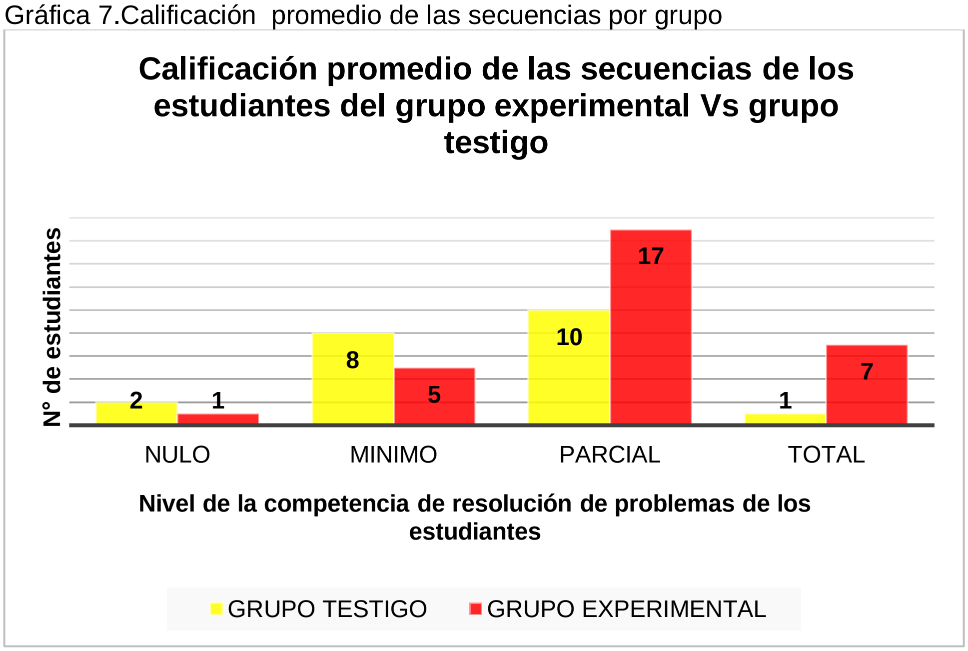
Con lo afirmado anteriormente y con lo que se observó en la Gráfica 5, se puede concluir que al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

5.2.2. Calificación promedio del desempeño de los estudiantes de las tres secuencias desarrolladas

En este proyecto de investigación, se realizaron tres secuencias en el grupo experimental con resolución de problemas diseñadas con metodología taller constructivo y tres secuencias en el grupo testigo con la metodología tradicional, las cuales se evaluaron con la rúbrica diseñada para esta investigación después de ser desarrolladas por los estudiantes y para sistematizar la propuesta de enseñanza se utilizó una Matriz de Observación adaptada de MEN (2009), que tenía como objetivo identificar las fortalezas, obstáculos y dificultades de cada secuencia teniendo en cuenta el alcance de los objetivos, la interacción profesor – estudiante, materiales y recursos utilizados, entre otros.

En la Gráfica 7, se presenta el análisis de la calificación promedio de las tres secuencias desarrolladas por cada estudiante, donde se evidencia que 18 de los 21 estudiantes del grupo testigo se encuentran en los niveles mínimo y parcial de la competencia de resolución de problemas y la mayoría de los estudiantes del grupo experimental se encuentran en los niveles parcial y total de esta competencia.

Gráfica 7.Calificación promedio de las secuencias por grupo



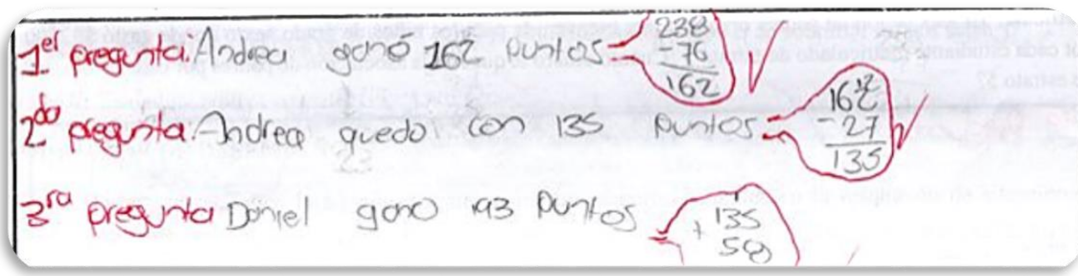
Fuente: Autoras.

Con el fin de sustentar los resultados expuestos en la Gráfica 7, se realizó un análisis cualitativo de las tres secuencias, el cual, muestra el proceso de los estudiantes del grupo experimental durante esta propuesta didáctica que hacia énfasis en el desarrollo de habilidades para resolver situaciones problema en contexto. A continuación, se muestran algunos protocolos en donde se evidenciará el proceso de los estudiantes.

Situación problema: Clase de matemáticas

El día jueves en clase de matemáticas Julián y Andrea ganaron 238 puntos entre los dos, por participar en los ejercicios propuestos. Si Julián ganó 76 puntos ¿Cuánto puntos ganó Andrea? Más tarde Andrea perdió 27 puntos por hacer indisciplina ¿Con cuántos puntos quedó Andrea al finalizar la clase de matemáticas? y Daniel obtuvo 58 puntos más que Andrea ¿Cuántos puntos ganó Daniel?

Protocolo n°1


1

1er pregunta: Andrea ganó 162 puntos = 238 − 76 = 162

2do pregunta: Andrea quedo con 135 puntos = 162 − 27 = 135

3ra pregunta Daniel gano 193 puntos + 135 58

Esta situación problema en contexto se les planteó en la guía de aprendizaje de la estructura aditiva, en la cual, partiendo de palabras como ganó, perdió y más que, identificaron los tipos de problemas aditivos considerados en esta investigación, definidos por Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015), que les permitió dar solución correcta a esta situación problema, teniendo en cuenta las etapas de resolución de problemas de Polya(2005). Los tipos de problemas inmersos en esta situación problema son: cambio de aumento y disminución con la incógnita en la cantidad final, combinación con la incógnita en el todo y comparación de aumento con la incógnita en el comparado.

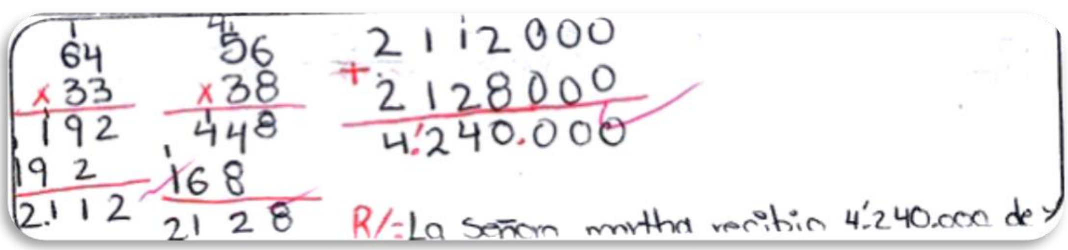
Situación problema: Día de la familia

La siguiente tabla muestra el menú de los almuerzos del día de la familia en el I.T.S.A.

Almuerzos día de la familia I.T.S.A	
Plato	**Precio**
Fritanga	$ 10.000
Carne a la llanera	$ 18.000
Lechona	$ 15.000
Pechuga al horno	$ 12.000

En el Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino se celebra el día de la familia donde se realizan diversas actividades culturales y se venden almuerzos, en el grado 607 hay 38 estudiantes y cada uno encargó 5 almuerzos. ¿Cuántos almuerzos en total encargó el grado 607?. Si María le pagó a la profesora un valor de $ 72.000 para apartar platos de fritanga ¿Para cuantas porciones le alcanza? Y el grado 605 encargó el doble de los almuerzos del grado 607. ¿Cuántos almuerzos encargó el grado 605?

Protocolo n°2



Esta situación problema en contexto se les planteó en la guía de aprendizaje de la estructura multiplicativa, en la cual, partiendo de expresiones como "cada uno encargó 5 almuerzos", "¿Para cuantas porciones le alcanza?" y "el doble", identificaron los tipos de problemas multiplicativos tomados en este proyecto de investigación, definidos por Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015), que les permitió dar solución correcta a esta situación problema, teniendo en cuenta las etapas de resolución de problemas de Polya(2005). Además, en esta guía de aprendizaje se les planteó diferentes situaciones problema en contexto que los llevó a formalizar los siguientes tipos de problemas, Isomorfismo de medidas (suma repetida) incógnita en medida de la segunda magnitud y comparación (aumento con referente desconocido) en la estructura multiplicativa convirtiendo una relación ternaria a una relación cuaternaria, como se definió en el apartado 3.2.3. de este informe.

Supermercado Matemático

Protocolo n° 3

SUPERMERCADO MATEMÁTICO

Formar grupos de cuatro estudiantes y comprar los productos indicados en la lista y completar la siguiente tabla.

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Libros	$ 14400	1.200	3 unidades	3600
Lápices	6000	$500	6 unidades	3.000
Balones	$ 96000	8000	1 unidad	8.000
Naranjas	$5400	$450	4 unidades	1800
			TOTAL	16.400

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

  RTA: 16.400 Porque 450 x 4 da = 18.000

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de las naranjas?

  RTA: El total es 14.600. → 3600 + 3000 + 8000 = 14.600

- ✓ Si tienes $10000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto hace falta para para el total de la compra?

  RTA: 6.400

- ✓ Si tengo $2250, ¿Me alcanza para comprar 5 naranjas?

  450 x 5 = 2250

  RTA: Si y exactos.

El supermercado matemático se les planteó en la tercera secuencia, en donde se combinaron las estructuras aditiva y multiplicativa. Esta actividad se realizó con ayuda de material didáctico, para que los estudiantes hicieran las compras durante la clase, teniendo como guía la lista de compra y completando la tabla para saber cuánto dinero tenían que pagar. Además, en esta guía de aprendizaje se les planteó una situación problema que involucra los tipos de problema trabajados en las anteriores guías.

De la sistematización realizada por medio de la matriz de observación durante el desarrollo de las tres secuencias tanto del grupo experimental como del grupo testigo para identificar las fortalezas, obstáculos y dificultades de los estudiantes, docentes y el material utilizado se puede inferir que las situaciones problema en contexto con metodología Taller Constructivo ayudaron a cautivar el interés de los estudiantes ya que permitían que el estudiante se apropiará del conocimiento con ayuda de las preguntas estimulantes planteadas por el docente basadas en las etapas para solucionar un problema de Polya. Por el contrario, en la fase de aplicación de la metodología tradicional se hacía énfasis en la transmisión de conocimientos y en el aprendizaje de los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división, igualmente los estudiantes resolvían la situación problema de manera mecánica ya que no eran situaciones en contexto para ellos.

Igualmente se fijó un modelo estadístico que tiene como variable respuesta la calificación promedio de las tres secuencias desarrolladas por cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA para probar si al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

$$\boldsymbol{Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \ldots, 51}$$

$\mathbf{Y_{ij}}$: La calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA de las tres secuencias desarrolladas.

$\boldsymbol{\mu}$: Intercepto

$\boldsymbol{\tau_i}$: Tratamientos $\begin{cases} \boldsymbol{\tau_1}\text{: Metodología Tradicional} \\ \boldsymbol{\tau_2}\text{: Resolución de problemas con metodología Taller constructivo} \end{cases}$

$\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$: Error experimental

- **Análisis exploratorio de los datos**

Se realizó un análisis exploratorio a la variable respuesta, es decir, a la calificación promedio del desempeño de cada estudiante en las tres secuencias desarrolladas por grupo, con el fin, de comprobar si los datos cumplen con los supuestos para poder realizar el juzgamiento de la hipótesis por medio de la prueba de TUKEY.

Grupo Testigo

Descriptivos de los datos del grupo testigo	
	Estadístico
Media	5,4333
C.V.	32,4540
Mediana	6,0000
Desviación estándar	1,76333
Rango	7,40
Asimetría	0,206
Curtosis	0,497

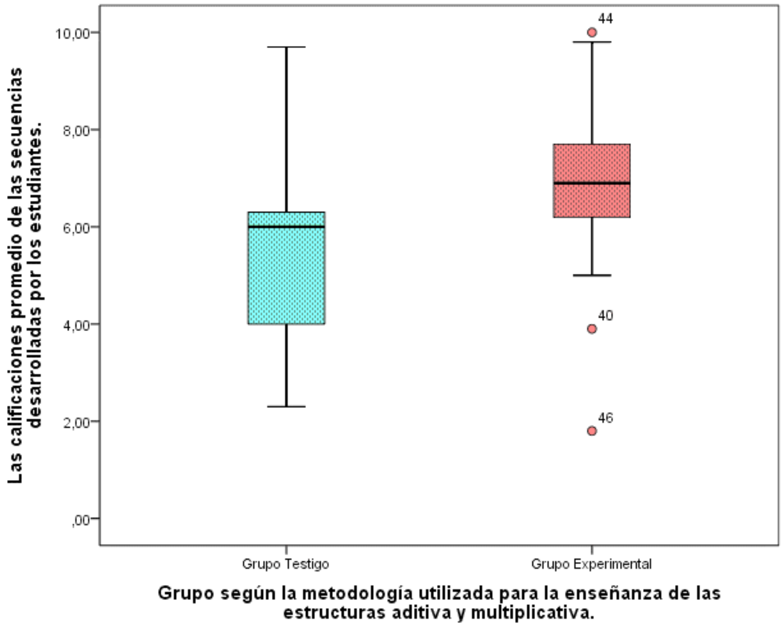
Debido a que la asimetría y curtosis son mayores que cero se puede afirmar que las calificaciones promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA de las tres secuencias desarrolladas están cercanos a la media global con una mayor frecuencia en notas inferiores a la media.

Grupo Experimental

Descriptivos de los datos de los estudiantes del grupo experimental	
	Estadístico
Media	6,9567
Mediana	6,9000
C.V.	24,870
Desviación estándar	1,73079
Rango	8,20
Asimetría	-0,580
Curtosis	1,815

Como la asimetría es menor a cero y la curtosis es mayor que cero, La calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA de las tres secuencias desarrolladas están cercanos a la media global con una mayor frecuencia en notas superiores a la media.

Gráfica 8.Las calificaciones promedio de las secuencias desarrolladas por los estudiantes.



En la Gráfica 8 se observa que la mitad de los estudiantes del grupo testigo tienen la calificación promedio del desempeño de las tres secuencias desarrolladas por debajo de 6,0, es decir, un nivel mínimo de la competencia resolución de problemas y la mitad de los estudiantes del grupo experimental tienen una calificación promedio del desempeño de las tres secuencias desarrolladas por cada estudiante por encima de 7,0, por lo tanto, se encuentran en un nivel parcial de esta competencia.

Igualmente, se puede afirmar que hay menos dispersión en el grupo experimental que en el grupo testigo, con calificaciones entre 5,0 y 10,0, con dos casos atípicos, un estudiante con un nivel mínimo de la competencia resolución de problemas y el otro con un nivel nulo de esta competencia.

- **Prueba de normalidad de Shapiro- Wilk**

$$\begin{cases} \text{Ho: La calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA} \\ \qquad \text{de las tres secuencias desarrolladas sigue una distribución normal.} \\ \qquad\qquad \text{vs} \\ \text{Ha: La calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 del ITSTA} \\ \qquad \text{de las tres secuencias desarrolladas no sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

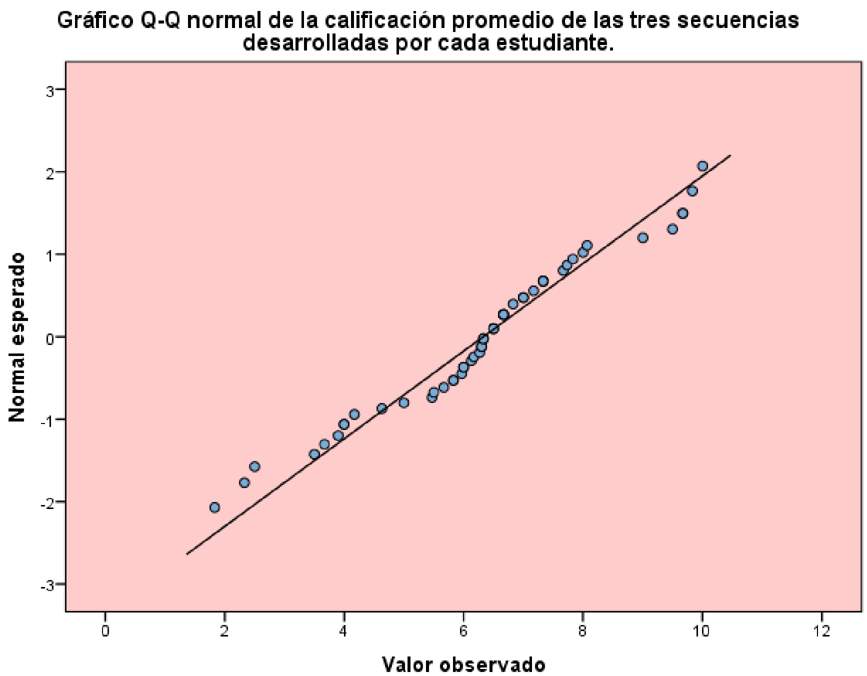
Tabla 16. Prueba de normalidad para la calificación promedio de las secuencias.

Prueba de normalidad de Shapiro-Wilk		
Estadístico	gl	Sig.
0,963	51	0,113

Fuente: Autoras

Con un tamaño del efecto de la prueba de 0,113 (Tabla 16) y un nivel de significancia del 0,05 no se rechaza la hipótesis nula, debido a que, el tamaño del efecto de la prueba> α, por lo tanto, la calificación promedio del desempeño de cada estudiante de los cursos 605 y 607 de las tres secuencias desarrolladas se aproxima a una distribución normal.

Gráfica 9. Gráfico para probar normalidad de la calificación promedio de las secuencias.



De igual manera, como se observa en la Gráfica 9 que los puntos se sitúan cerca de la diagonal, se puede decir que hay normalidad.

- **Prueba de Homocedasticidad**

Ho: La varianza de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo de las tres secuencias desarrolladas es igual a la varianza de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental de las tres secuencias desarrolladas.

vs

Ha: La varianza de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo de las tres secuencias desarrolladas es igual a la varianza de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental de las tres secuencias desarrolladas.

Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error (Variable dependiente: El promedio de las secuencias **)**

F	df1	df2	Sig.
,309	1	49	,581

Con un tamaño del efecto de la prueba de 0,581 y un nivel de significancia del 0,05 no se rechaza la hipótesis nula, debido a que, el tamaño del efecto de la prueba> α, por lo tanto, hay homocedasticidad (las varianzas son iguales).

Hipótesis

Ho: La media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es igual a la media de la calificación promedio del desempeño los estudiantes del grupo testigo.

vs

Ha: La media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es diferente a la media de la calificación promedio del desempeño los estudiantes del grupo testigo.

Para probar la hipótesis se realizó la Prueba de diferencia de medias de TUKEY logrando identificar si la diferencia es o no significativa.

Como se comprobó que la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas se aproxima a una distribución normal y hay homocedasticidad, se puede realizar la prueba de diferencia de medias de Tukey, con el fin de probar si la media la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es igual a la media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas , es decir, que al haber orientado las estructuras aditiva y multiplicativa inmersas en situaciones problema se logró un efecto en el nivel de la competencia resolución de problemas en los estudiantes del grupo experimental.

- **Prueba de Tukey**

Hipótesis

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ Vs \\ \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

μ_1= la media la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo obtenida de las tres secuencias desarrolladas

μ_2= la media la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres

Para poder realizar la prueba de Tukey se usa la ANOVA (Tabla 17), donde se obtiene el valor del CME (cuadrado medio del error) y así, poder hallar diferencia mínima significativa o comparador ($\mathbf{W_{ij}}$) con un nivel de significancia de 0,05, luego se calcula la diferencia de medias y se realiza la comparación con el valor de $\mathbf{W_{ij}}$.

Tabla 17. ANOVA la calificación promedio de las secuencias por estudiante.

ANOVA					
Resultado promedio secuencias					
	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	28,719	1	28,719	9,471	,003
Dentro de grupos	148,586	49	3,032		
Total	177,306	50			

Fuente: Autoras

Comparador ($\mathbf{W_{ij}}$): Es la diferencia mínima significativa que se compara con la diferencia de medias del grupo testigo contra el grupo experimental para determinar si esta es significativa o no.

$$\mathbf{W_{ij}} = \mathrm{q} \times \sqrt{\frac{\mathrm{CME}}{2} \times \left[\frac{1}{\mathrm{n_i}} + \frac{1}{\mathrm{n_j}}\right]}\ , \begin{cases} \mathrm{q}_{(2,50,0,05)} = \text{valor en la tabla de tukey} \\ \mathrm{CME} = \text{Cuadrado medio del error} \\ \mathrm{ni} = \text{Tamaño del grupo testigo} \\ \mathrm{nj} = \text{Tamaño del grupo Experimental} \end{cases}$$

$$\mathbf{W_{ij}} = 2{,}83 \times \sqrt{\frac{3{,}032}{2} \times \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{30}\right]} = \mathbf{0{,}9914044}$$

Tabla 18. Diferencia de medias para la calificación promedio de las secuencias.

	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	$\lvert\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}\rvert$	**Error estándar**	**Comparador**
Grupo 1 (Testigo) contra 2(Experimental)	21	30	$\lvert 5{,}4319 - 6{,}9567\rvert = 1{,}5248$	0,35031958	0,9914044

Fuente: Autoras

Como el valor de la diferencia de medias del grupo testigo contra el grupo experimental es mayor que el comparador; 1,5248 > 0,99140442 se obtiene una diferencia significativa, por lo tanto, se rechaza Ho, es decir, la media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo experimental obtenida de las tres secuencias desarrolladas es diferente la media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes del grupo testigo obtenida de las tres secuencias desarrolladas.

Con lo afirmado anteriormente y con lo que se observa en la Gráfica 9, se puede concluir que al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

6. CONCLUSIONES

En este informe se presentó la planificación, análisis y resultados de una propuesta de enseñanza basada en la resolución de problemas mediante un diseño de experimentos con los estudiantes del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino en los cursos 605 grupo testigo, con metodología tradicional, y 607 el grupo experimental, con enseñanza a partir en la resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales, utilizando la estrategia metodológica de Taller Constructivo, con el fin de determinar el efecto en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Para probar que al implementar la estrategia de resolución de situaciones problema en contexto, se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas, siendo ésta la hipótesis de la investigación, se realizó un análisis cualitativo al desempeño durante las sesiones de clase de 21 estudiantes del grupo testigo y 30 estudiantes del grupo experimental , y un análisis estadístico de las calificaciones de los estudiantes obtenidas mediante el cuestionario inicial, cuestionario final, las tres secuencias desarrolladas y la rúbrica de evaluación de los niveles de competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales, donde se puede obtener la valoración cuantitativa e identificar el nivel (nulo, mínimo, parcial y total) de la competencia de resolución de problemas en que se encuentran los estudiantes.

Además, se plantearon dos hipótesis estadísticas para probar la hipótesis de la investigación, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la calificación promedio del desempeño de los estudiantes en el cuestionario final y la media de la calificación promedio del desempeño de los estudiantes de las tres secuencias desarrolladas, dependiendo de la metodología utilizada para la enseñanza de las estructuras aditiva y multiplicativa, haciendo un análisis exploratorio de los datos con el fin de observar si se cumplen los supuestos estadísticos para poder hacer uso de la prueba de Tuckey, la cual en las dos hipótesis indicó que hay diferencia significativa entre el grupo experimental y el grupo testigo, por lo tanto, se puede concluir que al implementar la resolución de situaciones problema en contexto se logra un efecto positivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucran las estructuras aditiva y multiplicativa con números naturales.

Del análisis cualitativo se puede afirmar que hay cambios significativos en el aprendizaje de los estudiantes, debido a que, la mayoría identifican los tipos de problemas de las estructuras aditiva y multiplicativa y logran resolver adecuadamente situaciones problema, partiendo de las palabras clave como “más que”, “menos que”, “el doble”, “perdió”, “ganó”, entre otras, con ayuda de las etapas de Polya (2005), ya que estas contribuyen al desarrollo de la competencia resolución de problemas y subsana algunos de los errores que cometen los estudiantes en estas estructuras.

Después de haber implementado esta propuesta de enseñanza y haber analizado los resultados obtenidos se puede concluir que se logró alcanzar el objetivo de aprendizaje, el cual era resolver y formular problemas, a partir de situaciones en contexto escolar o no escolar, identificando y aplicando las estructuras aditiva y multiplicativa, ya que, la mayoría de los estudiantes del grupo experimental finalizó con un nivel parcial de la competencia de resolución de problemas. Por el contrario, la gran mayoría de los estudiantes del grupo testigo finalizó con un nivel mínimo de esta competencia, es decir que la estrategia didáctica que más favoreció el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales es la de resolución de problemas con metodología taller constructivo.

Con la resolución de situaciones problemas y la metodología taller constructivo se incentivó y motivó a los estudiantes a la formulación de problemas, lo cual aportó para que los estudiantes fueran los protagonistas de su propio conocimiento. Además, se manifestaron cambios significativos comparando los resultados del cuestionario inicial con el cuestionario final, como por ejemplo en la formulación de una situación problema partiendo de una expresión matemática, igualmente, identificaron los problemas aditivos y multiplicativos y dieron solución a situaciones problema en contexto de forma acertada.

Con la estrategia de enseñanza resolución de problemas con la metodología Taller Constructivo se logró que los estudiantes reflexionaran e hicieran metacognición acerca del proceso de resolución de situaciones problema según las etapas de Polya.

Debido a que el número total de la población objeto de estudio es reducida, los resultados obtenidos en esta propuesta no se pueden generalizar, por lo tanto será necesario, seguir la investigación para implementarla en grados sexto con poblaciones más amplias y determinar el efecto en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Se infiere que actualmente es importante implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje basadas en la resolución de problemas, para que los estudiantes doten de significado y sentido el conocimiento matemático y vean su utilidad en contextos cotidianos, matemáticos y de otras ciencias. Asimismo, el diseño y desarrollo de las secuencias utilizando la estrategia metodológica Taller Constructivo con ayuda de las etapas de Polya, desde los primeros grados escolares, en donde el rol del docente es el de mediador y orientador, proponiendo actividades de aprendizaje que favorezcan el "Hacer Matemáticas", promueven en los estudiantes el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático para reconstruir los conceptos y procedimientos matemáticos y aplicarlos en situaciones que lo requieran, todo esto con el fin de ir formando ciudadanos matemáticamente competentes.

7. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Beltrán, J., Camargo, H., López, P., Martínez, S. y Cañadas, M. (2016). *Cuadrado del binomio*. (Tesis maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, J., Romero, J.,…Barón, C. (1999). Estructura aditiva y formación para profesores para la educación básica. En: *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor* (pp. 46- 50). Bogotá, Colombia: Gaia.

Castaño, J. (1991). El conocimiento matemático en el grado cero. Bogotá: MEN

Flores, P., Castro, E. y Fernández, J. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Rico, L. y Flores, P. (Coords). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. (pp. 205 - 229). Madrid, España: Pirámide.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Matemática y su Didáctica para maestros*. p.26. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros /manual/1_Fundamentos.pdf

Gómez, J. (1983). El método experimental.

González y Gómez (2013), citado por Beltrán, J., Camargo, H., López, P., Martínez, S. y Cañadas, M (2016). En *Cuadrado del binomio*. Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 2. Bogotá: Universidad de los Andes. p. 88.

Gutiérrez, H. y De la vara. R. (2003). Introducción de diseño de experimentos. En: *Análisis y diseño de experimentos*. (p. 2-14). México: Mexicana.

Martinez, C. (2012). *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria* (Tesis de Maestria). Universidad Pedagógica Nacional de México.

Medina, A.C. (1998). El taller constructivo: estrategia para aprender a pensar mediante la construcción del conocimiento matemático. Duitama: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Medina, A. (2009). *Guía de estrategias didácticas para la comprensión significativa de las matemáticas* (Trabajo docente). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. (p.46-95). Bogotá, Colombia: MEN, y MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. V2*. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende. edu.co /sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá, Colombia: MEN, y MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2009). *Metodología estudio de clase*. Módulo 3. p. 16.

Oicata, L.,y Castro,L.(2013). *Secuencias Didácticas en Matemáticas Educación Básica Secundaria Matemáticas – Secundaria.* Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-329722_archivo_pdf_matematicas_secundaria.pdf

Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas.

Redondo, M. (2014). *La creatividad y resolución de problemas* (Trabajo de grado). Universidad de Valladolid Facultad Segovia.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A., & Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación. *Funes.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/466/1/RicoL07-2848.PDF

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (p. 125- 154). Barcelona, España: Horsori.

Vergnaud, G. (2004). *Problemas aditivos y multiplicativos*. En El niño, las matemáticas y la realidad. (p. 161- 184 y 197 – 223). México: Industrial.

Villalobos, X. (2008). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados Metodológicos*. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 6(3), 38-57

8. ANEXOS

Anexo A. Cuestionario Inicial

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas y Estadística
Cuestionario inicial
Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino

Nombre: ______________________ **Grado:** ________ **Tiempo:** 50 minutos

Objetivo: identificar los niveles iniciales de la competencia de resolución de problemas que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa de los estudiantes de grado sexto

Instrucciones Generales

- Leer muy bien cada situación antes de desarrollarla.
- En una hoja en blanco y de forma ordenada, realice los procedimientos para encontrar la solución.

1. Juan tiene $157000 en una alcancía y tiene 1'255.400 en el banco popular. ¿Cuánto dinero tiene Juan en total?

2. Andrés tenía 567 canicas, jugando en el campeonato municipal de canicas pierde 388. ¿Cuántas canicas le quedan a Andrés después del campeonato?

3. Pablo fue a un casino de la ciudad de Duitama. En donde ayer ganó $ 553000 y hoy perdió algo de dinero. Si al final ganó $137850. ¿Cuánto dinero perdió en total?

4. En una urna de cristal 118 pelotas de colores; hay 46 pelotas amarillas, 37 pelotas verdes y el resto son azules. ¿Cuántas pelotas azules hay en la urna?

5. Ana María gasta 352 segundos en dar una vuelta alrededor de la cancha de futbol. Ana María gasta 50 segundos más que Andrés. ¿Cuántos segundos gastó Andrés en dar la vuelta alrededor de la cancha de futbol?

6. En una bodega de frutas, hay 20 cajas de naranjas, con 56 naranjas cada caja. ¿Cuántas naranjas hay?

7. Luisa compró 910 chocolates para el día del amor y la amistad en el colegio y quiere repartirlas en partes iguales en 35cajas de regalo para sus compañeros. ¿Cuántos dulces tendrán cada caja que regalara a sus compañeros?

8. Mariana tiene el triple de esmaltes de los que tiene su hermana Alejandra. Si Alejandra tiene 12 esmaltes. ¿Cuántos esmaltes tiene Mariana?

9. Sandra tiene 150 libros y María tiene 50 libros ¿Cuántas veces tiene Sandra más libros que María?

Anexo B. Plan del cuestionario Inicial

Plan de cuestionario inicial sobre las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales
Grado 6º del Instituto Técnico Santo Tomás De Aquino

Nº de item	Referencia bibliográfica	Tipo de problemas aditivo y multiplicativo	Objetivo del ítem y tipo del error	Preguntas específicas	Ítem	Solución
1.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema con estructura aditiva (adición) con números naturales. Combinación, con la incógnita en el todo.	**Objetivo:** Identificar si desarrolla adecuadamente el algoritmo de la adición	¿Plantea la suma de manera adecuada? ¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la adición?	Juan tiene \$157000 en una alcancía y tiene 1’255.400 en el banco popular. ¿Cuánto dinero tiene Juan en total?	$\mathbf{1'255400}$ $\underline{+\,\mathbf{157000}}$ $1'412.400$ R/ Juan tiene en total \$ 1’412.400.
2.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema de sustracción con números naturales. Cambio de aumento y disminución con la incógnita en la cantidad final.	**Objetivo:** Identificar si desarrolla adecuadamente el algoritmo de la adición	¿Plantea la operación de manera adecuada? ¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la sustracción?	Andrés tenía 567 canicas, jugando en el campeonato municipal de canicas pierde 388. ¿Cuantas canicas le quedan a Andrés después del campeonato?	**Datos:** Tenía 567 canicas Perdió 388 canicas **Operación:** 567 $\underline{-\,388}$ 179 **Respuesta:** Andrés tiene 179 canicas después del campeonato.
3.	Adaptado de Vergnaud (2004). Problemas aditivos y	Situación problema de la adición y sustracción con	**Objetivo:** Identificar si utiliza la operación opuesta para la	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema?	Pablo fue a un casino de la ciudad de Duitama. En donde ayer ganó \$ 553000 y hoy perdió algo de dinero. Si al final ganó	**Datos:** Ayer ganó \$553000. En total ganó \$ 137850 **Operación:**

	multiplicativos. Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas, 191-193.	números naturales. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación	solución a la situación problema en vez de la adecuada.	¿Utiliza la operación correcta para la solución de la situación problema?	$137850. ¿Cuánto dinero perdió en total?	$\begin{array}{r}\mathbf{553000}\\ \underline{-\ \mathbf{137850}}\\ \mathbf{415150}\end{array}$ **Respuesta:** Pablo perdió $ 415150 en el casino**.**
4.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema de adición y sustracción con números naturales. Combinación con la incógnita en una parte.	**Objetivo:** Identificar si repite una de las cantidades propuestas para dar solución a la situación problema.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Usa adecuadamente los datos? ¿Plantea la adición y sustracción de manera adecuada?	En una urna de cristal 118 pelotas de colores; hay 46 pelotas amarillas, 37 pelotas verdes y el resto son azules. ¿Cuántas pelotas azules hay en la urna?	**Datos:** Total de pelotas: 118 Pelotas amarillas= 46 Pelotas verdes= 37 **Operación:** $\begin{array}{r}\mathbf{46}\\ \underline{+\ \mathbf{37}}\\ \mathbf{83}\end{array}\ \begin{array}{r}\mathbf{118}\\ \underline{-\mathbf{83}}\\ \mathbf{35}\end{array}$ **Respuesta:** En la urna de cristal hay 35 pelotas azules.
5.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema sustracción con números naturales. Comparación de aumento con la incógnita en el comparado.	**Objetivo:** Identificar si utiliza de manera adecuada la palabra clave “más” a la hora de plantear la operación.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Utiliza de manera adecuada la palabra clave “más”? ¿Plantea la sustracción adecuada?	Ana María gasta 352 segundos en dar una vuelta alrededor de la cancha de futbol. Ana María gasta 50 segundos más que Andrés. ¿Cuántos segundos gastó Andrés en dar la vuelta alrededor de la cancha de futbol?	**Datos:** 352 segundos = tiempo total de Ana María en dar una vuelta. Ana María gasta 50 segundos más que Andrés **Operación:** $\begin{array}{r}352\\ \underline{-50}\\ 302\end{array}$ **Respuesta:** Andrés gasta 302 segundos en dar una vuelta en la cancha de futbol.

6.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Estructura multiplicativa (multiplicación y división) con números naturales. Isomorfismo de medidas (suma repetida) Incógnita en medida de la segunda magnitud	**Objetivo:** Identificar si desarrolla de manera adecuada el algoritmo sin cambiar u omitir pasos.	¿Plantea la operación de manera adecuada? ¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la multiplicación?	En una bodega de frutas, hay 20 cajas de naranjas, con 56 naranjas cada caja. ¿Cuántas naranjas hay?	**Datos:** 20 cajas 1 caja= 56 naranjas **Operación:** $\begin{array}{r} \mathbf{20} \\ \times\mathbf{56} \\ \hline \mathbf{120} \\ \mathbf{+100} \\ \hline \mathbf{1120} \end{array}$ **Respuesta:** En la bodega hay 1120 naranjas.
				¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la división?	Luisa compró 910 chocolates para el día del amor y la amistad en el colegio y quiere repartirlas en partes iguales en 35cajas de regalo para sus compañeros. ¿Cuántos dulces tendrán cada caja que regalara a sus compañeros?	**Datos** **Operación:** $\frac{\mathbf{910}}{\mathbf{35}} = \mathbf{26}$ **Respuesta:** Luisa debe poner 26 dulces en cada caja para regalar a sus compañeros.
7.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Estructura multiplicativa (multiplicación) con números naturales. Comparación (aumento con referente desconocido)	**Objetivo:** Identificar si repite una de las cantidades propuestas para dar solución a la situación problema.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Usa adecuadamente los datos? ¿Plantea adecuadamente la multiplicación?	Mariana tiene el triple de esmaltes de los que tiene su hermana Alejandra. Si Alejandra tiene 12 esmaltes. ¿Cuántos esmaltes tiene Mariana?	**Datos** Alejandra= 12 esmaltes Mariana= Triple de esmaltes de Alejandra **Operación:** $\begin{array}{r} \mathbf{12} \\ \times\,\mathbf{3} \\ \hline \mathbf{36} \end{array}$ **Respuesta:** Mariana tiene 36 esmaltes

8.	Adaptado de Flores et al. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Estructura multiplicativa (división) con números naturales. Comparación (Aumento con escalar desconocido)	**Objetivo:** Identificar si utiliza de manera adecuada la palabra clave "más" a la hora de plantear la operación.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Utiliza de manera correcta la palabra clave "más"? ¿Plantea la operación adecuada?	Sandra tiene 150 libros y María tiene 50 libros ¿Cuántas veces tiene Sandra más libros que María?	**Datos** Sandra= 150 libros María = 50 libros **Operación:** $\frac{150}{50} = 3$ **Respuesta:** Sandra tiene 3 veces más libros que María.

Anexo C. Cuestionario Final

Universidad Pedagógica Y Tecnológica De Colombia
Licenciatura En Matemáticas Y Estadística
Seccional Duitama
Cuestionario Final
Instituto Técnico Santo Tomás De Aquino

Nombre: ____________________________**grado:** _____ **tiempo:**30 min

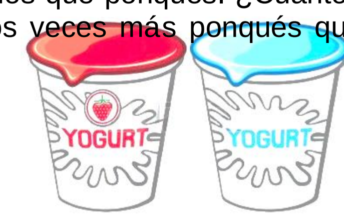
Objetivo: Identificar los niveles de competencia de resolución de problemas que involucren las estructuras aditiva y multiplicativa de los estudiantes de grado sexto.

Instrucciones generales

- Leer muy bien cada situación antes de desarrollarla.
- Justificar las respuestas con las operaciones necesarias.

1. Para la excursión de final de año de los grados sexto, el curso 607 organizó diferentes actividades para recolectar el dinero.
Mateo ganó \$56000 por vender rifas, pero Camila ganó \$ 82000 pesos más que Mateó al vender rifas y tamales. ¿Cuánto dinero ganó Camila?. Si Martin debía recolectar cierto dinero por vender rifas pero perdió \$28000 debido a que no le pagaron y quedo con \$ 62000 ¿Cuánto dinero debía recolectar Martin? Y Ana recolecto \$ \$ 18000 menos que Martin. ¿Cuánto dinero ganó Ana? Entonces ¿Cuánto dinero en total recolectaron Mateo, Camila y Martin?

2. En el Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino el grado 905 está organizando las onces para repartirlas en el colegio a la hora de descanso. Alistaron 38 canastillas y en cada una hay 41 ponqués de chocolate. ¿Cuántos ponqués hay en total para repartir? Los estudiantes empacaron el triple de bananos que ponqués. ¿Cuántos bananos empacaron en total para repartir? Si hay dos veces más ponqués que yogures ¿cuántos yogures hay?



3. Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática.
$(16 + 7 - 4) \times 5$

Anexo D. Plan del cuestionario final

Plan de cuestionario final sobre las estructuras aditiva y multiplicativa de números naturales
Grado 6º del Instituto Técnico Santo Tomás De Aquino

Nº DE ITEM	REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	TIPO DE PROBLEMAS ADITIVO Y MULTUPLICATIVO	OBJETIVO DEL ÍTEM Y TIPO DEL ERROR	PREGUNTAS ESPECÍFICAS	ÍTEM	SOLUCIÓN
1.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema con estructura aditiva (adición) con números naturales. Combinación, con la incógnita en el todo.	**Objetivo:** Identificar si desarrolla adecuadamente el algoritmo de la adición	¿Plantea la suma de manera adecuada? ¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la adición?	Para la excursión de final de año de los grados sexto, el curso 607 organizó diferentes actividades para recolectar el dinero. Mateo ganó $56000 por vender rifas, pero Camila ganó $ 82000 pesos más que Mateó al vender rifas y tamales. ¿Cuánto dinero ganó Camila?. Si Martin debía recolectar cierto dinero por vender rifas pero perdió $28000 debido a que no le pagaron y quedo con $ 62000 ¿Cuánto dinero debía recolectar Martin? Y Ana recolecto $ $ 18000 menos que	¿Cuánto dinero en total recolectaron Mateo, Camila y Martin? 56000+ 62000+ 138000= 256000
2.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema de adición y sustracción con números naturales. Combinación con la incógnita en una parte.	**Objetivo:** Identificar si repite una de las cantidades propuestas para dar solución a la situación problema.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Usa adecuadamente los datos? ¿Plantea la adición y sustracción de manera adecuada?		¿Cuánto dinero debía recolectar Martin? 28000+62000= 90000 R/ Martin debía recolectar $ 90000.

3.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Situación problema sustracción con números naturales. Comparación de aumento con la incógnita en el comparado.	**Objetivo:** Identificar si utiliza de manera adecuada la palabra clave “más” a la hora de plantear la operación.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Utiliza de manera adecuada la palabra clave “más”? ¿Plantea la sustracción adecuada?	Martin. ¿Cuánto dinero ganó Ana? Entonces ¿Cuánto dinero en total recolectaron Mateo, Camila y Martin?	¿Cuánto dinero ganó Camila?. 56000+ 82000= 138000 R/ Camila ganó $138000 ¿Cuánto dinero ganó Ana? 62000- 18000= 44000 R/ Ana ganó $ 44000
4.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Estructura multiplicativa (multiplicación y división) con números naturales. Isomorfismo de medidas (suma repetida) Incógnita en medida de la segunda magnitud	**Objetivo:** Identificar si desarrolla de manera adecuada el algoritmo sin cambiar u omitir pasos.	¿Plantea la operación de manera adecuada? ¿Desarrolla adecuadamente el algoritmo de la multiplicación?	En el Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino el grado 905 está organizando las onces para repartirlas en el colegio a la hora de descanso. Alistaron 38 canastillas y en cada una hay 41 ponqués de chocolate. ¿Cuántos ponqués hay en total para repartir? Los estudiantes empacaron el triple de bananos que ponqués. ¿Cuántos bananos empacaron en total para repartir? Si hay dos veces más ponqués que yogures	¿Cuántos ponqués hay en total para repartir? $38 \times 41 = 1558$ R/ Hay 1558 ponqués.
5.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación	Estructura multiplicativa (multiplicación) con números naturales. Comparación (aumento con	**Objetivo:** Identificar si repite una de las cantidades propuestas para dar solución a la	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema?		¿Cuántos bananos empacaron en total para repartir? $1558 \times 3 = 4674$ R/ Empacaron 4674 bananos.

	Primaria. Editorial pirámide	referente desconocido)	situación problema.	¿Usa adecuadamente los datos? ¿Plantea adecuadamente la multiplicación?	¿cuántos yogures hay?	
6.	Adaptado de Flores y Otros (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Editorial pirámide	Estructura multiplicativa (división) con números naturales. Comparación (Aumento con escalar desconocido)	**Objetivo:** Identificar si utiliza de manera adecuada la palabra clave "más" a la hora de plantear la operación.	¿Comprende adecuadamente el enunciado de la situación problema? ¿Utiliza de manera correcta la palabra clave "más"? ¿Plantea la operación adecuada?		¿Cuántos yogures hay? $1558 \div 2 = 779$ R/ Hay 779 yogures
7.	Adaptado de Fernández (2000). Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticas. Editorial Ciss Praxis.	Expresiones Aritméticas. (Estructuras aditiva y multiplicativa)	**Objetivo:** Identificar si plantea y resuelve de manera adecuada la situación problema con las instrucciones dadas.	¿Plantea adecuadamente la situación problema? ¿Resuelve adecuadamente la operación según el orden establecido?	Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática. $(16 + 7 - 4) \times 5$	

Anexo E. Matriz resumen de observación diligenciada de Resolución de problemas con la estrategia metodológica Taller Constructivo

	FORTALEZAS	OBSTACULOS	DIFICULTADES	SUGERENCIAS/ OBSERVACIONES
Alcance de los objetivos	En las tres secuencias se alcanzaron los objetivos cumpliendo con los indicadores propuestos			
Plan de clase propuesto	El diseño de las tres secuencias fue apropiado para alcanzar los objetivos propuestos.		En una de las tres secuencias toco recortar el tiempo de las actividades, debido a una actividad del colegio.	
Metodologías empleadas para el desarrollo de la clase	En las tres secuencias con resolución de problemas, la estrategia metodológica taller constructivo ayudo en el desarrollo del aprendizaje.			
Interacciones profesor-estudiantes		En una de las tres secciones no hubo tanta participación activa de los estudiantes.		
Interacciones estudiantes-estudiantes	Con las actividades planteadas en cada una de las guías se fomentó la participación de los estudiantes, generando debate en algunas ocasiones.			
Desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes	En las tres secuencias se consiguió que la mayoría de los estudiantes construyeran el conocimiento a partir de la metodología Taller Constructivo.		Algunos estudiantes no participaban activamente, por lo tanto, el único instrumento para observar el desarrolla era la guía.	Buscar estrategias para lograr la participación activa de todos los estudiantes y así poder ver el proceso cualitativo de cada uno.

Materiales y recursos utilizados	El diseño de los materiales y recursos utilizados fue el adecuado para cautivar la atención de los estudiantes y así lograr una participación activa.			Hacer los recursos en un material resistente para su fácil manipulación.
Errores cometidos por los estudiantes en la solución de situaciones problema	Los errores cometidos por los estudiantes en las tres sesiones fueron de gran aprovechamiento para que a partir de ellos se pudiera generar conocimiento.			
Proceso de evaluación	El proceso de evaluación se logró de manera continua durante toda la sesión gracias a las actividades planteadas.			
Aspectos generales			En una de las sesiones se presentó un inconveniente de agresión verbal por intolerancia ajeno a las actividades.	

Fuente:Ministerio de Educación Nacional (2009)

Anexo F. Matriz resumen de observación diligenciada de la metodología tradicional

	FORTALEZAS	**OBSTACULOS**	**DIFICULTADES**	**SUGERENCIAS/ OBSERVACIONES**
Alcance de los objetivos	En todas las sesiones se lograron los objetivos.			
Plan de clase propuesto		El plan de clase propuesto no permitió la participación activa de los estudiantes.	El plan de clase propuesto no ayudo a cautivar el interés de los estudiantes.	Es importante innovar en las actividades planteadas para los estudiantes.
Metodologías empleadas para el desarrollo de la clase		La metodología tradicional no generó impacto en alguna de las sesiones.		
Interacciones profesor-estudiantes			Con la metodología tradicional no había mucha interacción entre estudiante y profesor, debido a que las secuencias no permitían la participación de los estudiantes.	
Interacciones estudiantes-estudiantes		No hubo interacción entre los estudiantes, porque los ejercicios y taller se realizaban de manera individual.		
Desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes	Se logró que los estudiantes aprendieran los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división.			
Materiales y recursos utilizados			Solo se utilizó el tablero por parte del profesor.	
Errores cometidos por los estudiantes en la solución de		Los errores de los estudiantes solo se les evaluó en la		

situaciones problema		realización del taller final de cada sesión.		
Proceso de evaluación		Solo se le evaluó al estudiante de manera cuantitativa con los resultados obtenidos en el taller desarrollado de manera individual.		Es importante hacer un proceso de evaluación continuo.
Aspectos generales			Los estudiantes en todas las sesiones mostraron poco interés por las actividades realizadas.	

Fuente:Ministerio de Educación Nacional (2009)

Anexo G. Síntesis Etapas de la estrategia metodológica Taller Constructivo

PROCESO DIDÁCTICO		ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE- CONTENIDOS
INTRODUCCIÓN		
INSTRUCCIONES		
D E S A R R O L L O	**REVISIÓN CONCEPTOS PREVIOS**	Se proponen actividades para rescatar los conceptos y preconcepciones que poseen los estudiantes acerca del tema. Se revisa que los alumnos posean los conceptos preliminares, que servirán de base para descubrir y construir los nuevos conceptos.
	ACCIÓN REFLEXIÓN CONSTRUCCIÓN LÓGICA	Trabajo individual. Toda actividad debe conducir a una reflexión. La acción son las actividades que propone el maestro y realiza el alumno en forma individual para reflexionar sobre ellas y con el fin de construir el conocimiento lógico matemático. Mediante preguntas que susciten nuevas preguntas, el alumno descubre o deduce características, propiedades, generalizaciones, etc., de los objetos y que estos no poseían por sí mismos. Ej. Descubrir el sentido de la propiedad conmutativa que se cumple e diferentes situaciones (en la unión e intersección de conjuntos, en la suma y multiplicación de naturales, etc.)
	FORMULACIÓN	Después de que el alumno descubre y construye sus propios conceptos y elabora sus propias conclusiones. En estas etapa no se espera que los conceptos elaborados por los alumnos sean los correctos, o los que maneja el profesor. Se debe valorar toda producción personal y orientar en caso necesario. En lo posible este trabajo debe realizarse en forma escrita e individual.
	VALIDACIÓN	Confrontación en pequeños grupos o en plenaria de los procesos y resultados obtenidos en la etapa anterior. Es la oportunidad para que el estudiante aprenda a argumentar y sustentar como también a escuchar, criticar, contra argumentar, etc. De esta forma desarrolla competencias comunicativas y de razonamiento lógico. Después del debate en grupo se llega a un consenso o producción colectiva el cual se presentara en plenaria.
	FORMALIZACIÓN	El maestro precisa en plenaria las nociones, conceptos, conclusiones, generalizaciones, simbología, etc.
	APLICACIÓN	Se pone a prueba la construcción de los conceptos y su incorporación a la estructura cognitiva del estudiante. Se proponen ejercicios o problemas de aplicación, pero no para repetir mecánicamente lo aprendido, sino para establecer las relaciones y seleccionar los contenidos conceptuales para aplicarlos en nuevas situaciones que se presenten.
CRITERIOS Y DISEÑO DE EVALUACIÓN Fuente: Medina (2009)		La evaluación se considera como un medio para procurar el desarrollo del pensamiento matemático y del individuo, luego, debe permitir aproximarse, cometer errores, reflexionar, reconstruir, expresar, sustentar y aplicar conocimiento. Por lo tanto la evaluación debe estar presente en todo proceso mediante la observación, diálogo, toma de registros para verificar si el aprendizaje es significativo, se desarrollan procesos de pensamiento y proceso actitudinales.

Anexo H. Secuencias de enseñanza estructuradas con la estrategia Metodológica Taller Constructivo para el Grupo Experimental.

SECUENCIA N° 1

ESTRUCTURA ADITIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Asignatura: Matemáticas **Grado:** _____ **Tiempo**: 120 min **Fecha** _____________

Pensamiento numérico

Estándar básico:
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de desempeño:
- Comprende y aplica la adición y sustracción con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:
De manera ordenada y por parejas solucionar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

I. Conceptos previos

✓ Adición y sustracción de dos dígitos con números naturales.

Actividad # 1. Adición y sustracción de dos dígitos y sus regularidades.
Encontrar los dos sumandos que cumpla el resultado dado en la adición y el minuendo y sustraendo que cumpla el resultado de la sustracción. Adaptado de sistema de capacitación docentes en Japón.

$$\begin{array}{r} \_\ \_ \\ +\ \ \_ \\ \hline 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \_\ \_ \\ -\ \ \_ \\ \hline 1\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0 \\ +\ \ 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 5 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ +\ 4 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ +\ 3 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 2 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ +\ 1 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -97 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ -98 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 102 \\ -99 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -95 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ -96 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 102 \\ -97 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 103 \\ -98 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 104 \\ -99 \\ \hline 5 \end{array}$$

Según la actividad anterior ¿Encuentra alguna característica común en cada una de las operaciones? ¿Conociendo el resultado de las adiciones y sustracciones dadas anteriormente, puede determinar cuántas operaciones se obtienen en cada caso?

El minuendo y el sustraendo van aumentando de forma consecutiva obteniendo en todos los casos el mismo resultado. Además este mismo valor va a dar cierta cantidad de veces según el valor propuesto en la diferencia.

El primer sumando va aumentando y el segundo va disminuyendo de forma consecutiva obteniendo en todos los casos el mismo resultado. Además este mismo valor se va a dar limitadas veces por las condiciones dadas ya que se están manejando los dígitos del 1 hasta el 9.

II. Acción + Reflexión = Construcción lógica

Actividad # 2.

Por parejas solucionar la siguiente situación problema adaptada de Flores & Otros (2015) y Vergnaud (2004).

Clase de matemáticas

El día jueves en clase de matemáticas Julián y Andrea ganaron 238 puntos entre los dos, por participar en los ejercicios propuestos. Si Julián ganó 76 puntos ¿Cuánto puntos ganó Andrea? Más tarde Andrea perdió 27 puntos por hacer indisciplina ¿Con cuántos puntos quedo Andrea al finalizar la clase de matemáticas? y Daniel obtuvo 58 puntos más que Andrea ¿Cuántos puntos ganó Daniel?

Solución
¿Cuánto puntos ganó Andrea?
238 – 76= 162 R/ Andrea ganó 162 puntos en clase de matemáticas.

¿Con cuántos puntos quedo Andrea al finalizar la clase de matemáticas?
162 – 27 = 135 R/ Andrea quedo con 145 puntos al finalizar la clase de matemáticas.

¿Cuántos puntos ganó Daniel?
135 + 58= 193 R/ Daniel ganó 193 puntos en clase de matemáticas.

III. Formulación Y Validación

Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué operación u operaciones realizó para desarrollar la situación problema anterior? ¿Por qué?

R/ Las operaciones que se realizan son la adición y sustracción para dar solución a la situación problema.

- ✓ Del planteamiento del problema, ¿Qué palabras clave le indican que la operación a realizar es una sustracción o adición?
  R/ Las palabras claves son: gastó y más que.

- ✓ ¿Cuáles son los términos de la adición y sustracción?

R/ Los términos de la adición son: sumandos y total.
R/ Los términos de la sustracción son: Minuendo, sustraendo y diferencia.

IV. Formalización.

Según Vergnaud (2004) y Flores et al. (2015), la estructura aditiva (adición y sitracción) y los tipos de problemas aditivos son:

Adición. La adición es una operación que permite realizar algunas acciones como añadir, aumentar, agregar o de igual manera comparar entre números naturales y hallar totales.

Sustracción. La sustracción es una operación que permite dar, perder, bajar, disminuir y gastar entre números naturales. La sustracción se puede entender como una suma donde se ignora uno de los sumandos.

	TIPO	
ESTRUCTURA ADITIVA	a+ b=?	Combinación, con la incógnita en el todo.
	a+ b=? y a-b=?	Cambio de aumento y disminución con la incógnita en la cantidad final
	?+ b= c	Combinación con la incógnita en una parte.
		Comparación de aumento y disminución con la incógnita en el comparado.

Etapas para resolver problemas

Según Polya (2005) hay cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema:

Responder las siguientes preguntas:

¿Qué se entiende por adición?
La adición es una operación que permite realizar algunas acciones como añadir, aumentar, agregar o de igual manera comparar entre números naturales y hallar totales.

¿Qué se entiende por sustracción?
La sustracción es una operación que permite dar, perder, bajar, disminuir y gastar entre números naturales. La sustracción se puede entender como una suma donde se ignora uno de los sumandos.

¿Qué características le permite identificar las operaciones a realizar en el problema anteriormente desarrollado?

La característica más importante son las palabras clave que se encuentran en el enunciado como gastó y más que nos sugieren realizar una suma y una resta.

V. Aplicación y evaluación

Actividad # 4

Formar grupos de dos personas y elegir una balota para solucionar la situación problema correspondiente. Problemas adaptados de Vergnaud (2004) y Flores & Otros (2015).

Matriculando

La siguiente tabla muestra el recibo de pago para la matrícula de los estudiantes de grado sexto del Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino.

	RECIBO DE PAGO 2017		
	Estrato 1 y 2	Estrato 3 y 4	Estrato 5 o más
Asociación de padres	$ 27.000	$ 54.000	$ 81.000
Seguro estudiantil	$ 15.000	$ 30.000	$ 45.000
Club deportivo			
TOTAL	$ 72.000	$ 148.000	$ 216.000

El papá de Andrés en el 2017 pagó $ 148.000 de matrícula por asociación de padres, seguro estudiantil y club deportivo. Teniendo en cuenta la información dada ¿Cuánto pagó el papá de Andrés por el club deportivo?

Si la mamá de Mariana pagó $68000 pesos más que el papá de Andrés. ¿Cuánto pagó la mamá de Mariana por la matricula? La asociación de padres organizo una bienvenida para los niños de grado sexto donde gastó $32000 por cada estudiante matriculado de estrato 5 ¿Cuánto dinero le queda a la asociación de padres por cada estudiante de estrato 5?

Solución:
¿Cuánto pagó el papá de Andrés por el club deportivo?
54000 + 30000 = 84000
148000 – 84000 = 64000 R/ El papá de Andrés pagó $64000 por el club deportivo.

¿Cuánto pagó la mamá de Mariana por la matricula?
148000 +68000 = 216 000 R/ La mamá de Mariana pagó $216000 por la matrícula.

¿Cuánto dinero le queda a la asociación de padres por cada estudiante de estrato 5?
81000 – 32000= 49000 R/ A la asociación de padres les queda $ 49000 por cada estudiante.

REFERENCIAS

Flores, P. & Otros. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Rico, L. y Flores, P. (Coords). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. (pp. 205 - 229). Madrid, España: Pirámide.

Polya, G. (2005). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press. Recuperado de. https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Sistema de capacitación docente en Japón. Maestros aprendiendo Juntos. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=kBP8lpQqtY8

Vergnaud, G. (2004). Problemas aditivos y multiplicativos. *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*, 191-193.

SECUENCIA N° 2

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Asignatura: Matemáticas **Grado:** _____ **Tiempo**: 120 min **Fecha** ____________

Pensamiento Numérico

Estándar básico:
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de desempeño:

- Comprende y aplica la multiplicación y división con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:
De manera ordenada y por parejas solucionar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

I. Conceptos previos

✓ Multiplicación y división

Actividad # 1. Situaciones problema con multiplicación y división

Resolver las siguientes situaciones problema: adaptada de Flores & Otros (2015) y Vergnaud (2004).

- Ana María tiene $ 2500 y su hermana Juana tiene el doble del dinero que tiene Ana María. ¿Cuánto dinero tiene Juana?
  $2500 \times 2 = 5000$ R/ Juana tiene $ 5000

- Si Juan Pablo tiene 81 tasos y tiene 3 veces más que su primo Andrés. ¿Cuántos tasos tiene Andrés?
  $81 \div 3 = 27$ R/ Andrés tiene 27 tasos.

II. Acción + Reflexión = Construcción Lógica

Actividad # 2.

Día de la Familia.

La siguiente tabla muestra el menú de los almuerzos del día de la familia en el I.T.S.A.

Almuerzos día de la familia I.T.S.A	
Plato	**Precio**
Fritanga	$ 10.000
Carne a la llanera	$ 18.000
Lechona	$ 15.000
Pechuga al horno	$ 12.000

En el Instituto Técnico Santo Tomás de Aquino se celebra el día de la familia donde se realizan diversas actividades culturales y se venden almuerzos, en el grado 607 hay 38 estudiantes y cada uno encargó 5 almuerzos. ¿Cuántos almuerzos en total encargó el grado 607?

Si María le pagó a la profesora un valor de $ 72.000 para apartar platos de carne llanera ¿Para cuantas porciones le alcanza? Y el grado 605 encargó el doble de los almuerzos del grado 607. ¿Cuántos almuerzos encargó el grado 605?

Solución

¿Cuántos almuerzos en total encargó el grado 607?

$38 \times 5 = 180$ R/ En el grado 607 se apartaron 180 almuerzos.

¿Para cuantas porciones le alcanza?

$72000 \div 18000 = 4$ R/ A María le alcanza para 4 porciones de carne llanera.

¿Cuántos almuerzos encargó el grado 605?

$180 \times 3 = 540$ R/ El grado 605 encargó 540 almuerzos.

III. Formulación Y Validación

Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué operación u operaciones realizó para desarrollar la situación problema anterior? ¿Por qué?

R/ Las operaciones que se realizan son la multiplicación y división para dar solución a la situación problema.

- ✓ Del planteamiento del problema, ¿Qué indica que la operación a realizar son multiplicación o división?

R/ las expresiones hay 38 estudiantes y cada uno encargó 5 almuerzos, el triple y la pregunta ¿Para cuantas porciones le alcanza? Indican que las operaciones a realizar son multiplicación o división.

- ✓ ¿Cuáles son los términos de la multiplicación y la división?

R/ Los términos de la multiplicación son: factores y producto.
R/ Los términos de la división son: dividendo, divisor, cociente y residuo.

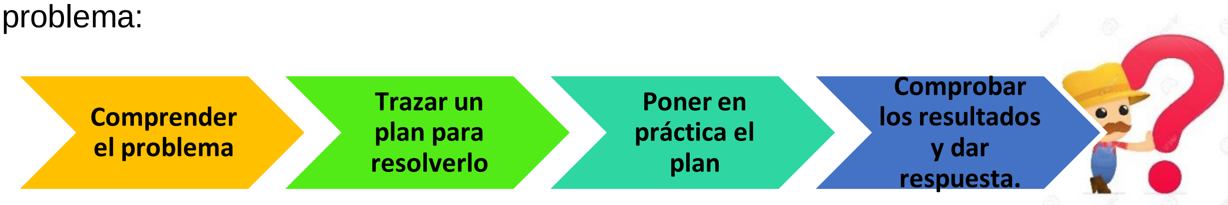
IV. Formalización:

Según Vergnaud (2004) la multiplicación es una operación, se entiende como adición repetida de una misma cantidad permitiendo hallar el triple, el doble o en general un número de veces más. La división es una operación que se entiende como una comparación de dos medidas aumento con escalar desconocido.

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA	**TIPO**	
		Isomorfismo de medidas (suma repetida) Incógnita en medida de la segunda magnitud
		Comparación (aumento con referente desconocido)
		Comparación (aumento con escalar desconocido)

Etapas para resolver problemas

Según Polya (2005) hay cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema:



Responder las siguientes preguntas:

¿Qué se entiende por multiplicación?
La multiplicación es una operación, se entiende como adición repetida de una misma cantidad permitiendo hallar el triple, el doble o en general un número de veces más.

¿Qué se entiende por división?
La división es una operación que se entiende como una comparación de dos medidas aumento con escalar desconocido.

¿Qué características le permite identificar las operaciones a realizar en el problema anteriormente desarrollado?
La característica más importante son las palabras clave que se muestran en el enunciado como son: las expresiones hay 38 estudiantes y cada uno encargó 5 almuerzos, el triple y la pregunta ¿Para cuantas porciones le alcanza? Indican que las operaciones a realizar son multiplicación o división.

V. Aplicación y evaluación:

Actividad # 4

Formar grupos de dos personas y elegir una balota para solucionar la situación problema correspondiente. Problemas adaptados de Vergnaud (2004) y Flores & Otros (2015).

Día deportivo.

En la siguiente tabla se muestra el valor por tallas del uniforme (camiseta, pantaloneta y medias) deportivo para el desfile del día deportivo de los grados sexto, séptimo y octavo de I.T.S.A fabricados por Martha Hernández.

TALLA	PRECIO
10 Y 12	$ 33.000
14 Y 16	$ 38.000

Los grados sexto compraron 120 uniformes, 64 eran de tallas entre 10 y 12 y 56 de talla 14 y 16. ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado sexto?

Si los grados sexto compraron dos veces más uniformes entre las tallas 10 y 12 que los grados octavos ¿Cuántos uniformes de tallas 10 y 12 compraron los grados octavos? . Además, los grados octavo compraron el triple de uniformes de tallas entre 14 y 16 de los grados sexto.

¿Cuántos uniformes de tallas 14 y 16 compraron los grados octavos?, entonces ¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado octavo?

Solución:

¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado sexto?
$64 \times 33000 = 2'112.000$ $\quad$ $56 \times 38000 = 2'128.000$
$2'112.000 + \quad 2'128.000 = 4'240.000$
R/ Martha recibe por los uniformes de grado sexto \$ $4'240.000$

¿Cuántos uniformes de tallas 10 y 12 compraron los grados octavos?
$64 \div 2 = 32$ R/ los grados octavos compraron 32 uniformes de tallas 10 y 12.

¿Cuántos uniformes de tallas 14 y 16 compraron los grados octavos?
$56 \times 3 = 168$ R/ los grados octavos compraron 168 uniformes de tallas 14 y 16.

¿Cuánto dinero recibió Martha por los uniformes de grado octavo?
$32 \times 33000 = 1'056.000$ $\quad$ $168 \times 38000 = 6'384.000$
$1'056.000 + \quad 6'384.000 = 7'440.000$
R/ Martha recibe por los uniformes de grado sexto \$ $7'440.000$

REFERENCIAS

Flores, P. & Otros. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Rico, L. y Flores, P. (Coords). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. (pp. 205 - 229). Madrid, España: Pirámide.

Polya, G. (2005). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press. Recuperado de. https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Vergnaud, G. (2004). Problemas aditivos y multiplicativos. *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*, 191-193.

SECUENCIA N° 3

ESTRUCTURAS ADITIVA Y MULTIPLICTIVA CON SITUACIONES PROBLEMA

Asignatura: Matemáticas **Grado:** _____ **Tiempo**: 120 min **Fecha** _____________

Pensamiento Numérico

Estándar básico:
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Indicador de desempeño:

- Comprende y aplica la adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales en la resolución de situaciones problema.

Estrategias metodológicas:
Taller constructivo. Trabajo individual y grupal.

Instrucción general:

De manera ordenada y por parejas solucionar las siguientes actividades en los espacios respectivos justificando con las operaciones requeridas cada respuesta.

I. Conceptos previos

Actividad # 1. Adaptado de Flores & Otros (2015) y Vergnaud (2004).

La siguiente tabla muestra el número de estudiantes de grado sexto del I.T.S.A. de la sede central que participaron en la olimpiada municipal de matemáticas.

Grado	N° de Estudiantes
605	12
606	9
607	15

¿Cuántos estudiantes de grado sexto se presentaron en total la olimpiada matemática?

Si de los grados decimo se presentaron tres veces más estudiantes a la olimpiada matemática que del grado sexto. ¿Cuántos estudiantes de grado decimo se presentaron?

Solución

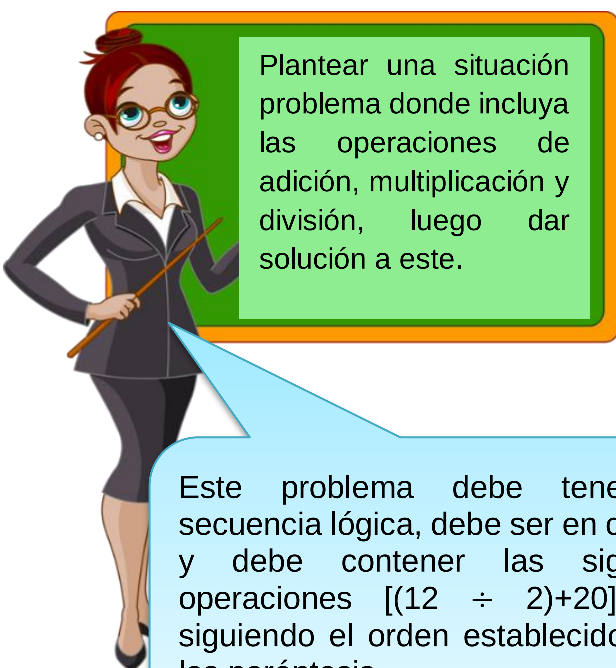
¿Cuántos estudiantes de grado sexto se presentaron en total la olimpiada matemática?
12 + 9+ 15 = 36 R/ Se presentaron 36 estudiantes de grado sexto.

¿Cuántos estudiantes de grado decimo se presentaron?
36 × 3= 108 R/ Se presentaron 108 estudiantes de grado decimo.
Otra forma de representar:
(12 + 9+ 15) × 3= 36 × 3 = 108

II. Acción + Reflexión = Construcción lógica:

Orden De Las Operaciones Por Agrupación De Términos

Actividad # 2. Adaptado de Flores & Otros (2015) y Vergnaud (2004).



Este problema debe tener una secuencia lógica, debe ser en contexto y debe contener las siguientes operaciones [(12 ÷ 2)+20] X 3, siguiendo el orden establecido según los paréntesis.

Sofía tiene 12 manzanas y ella tiene dos veces más manzanas que su hermano. Juan Pablo tiene 20 manzanas más que el hermano de Sofía y Mariana tiene el triple de manzanas que Juan Pablo. ¿Cuántas manzanas tiene Mariana?

Solución:
12 ÷ 2= 6 6+20=26 26 X 3= 78
Mariana tiene 78 manzanas.

III. Formulación y validación:

Teniendo en cuenta el problema anteriormente formulado y desarrollado socializarlo con los compañeros luego responder las siguientes preguntas:

✓ ¿Cuál fue el orden en el que se desarrollan las operaciones para dar solución al problema planteado?

Para dar solución al problema planteado se desarrolló división, suma y multiplicación.

✓ ¿Qué indica el orden en el que se deben realizar las operaciones?

Los signos de agrupación; primero se desarrolla los paréntesis redondos, luego paréntesis cuadrado de adentro hacia afuera.

IV. Formalización:

Según Salgado (2007):

Solución de expresiones matemáticas combinando las estructuras aditiva y multiplicativa.

Para resolver expresiones matemáticas combinando las estructuras aditiva y multiplicativa, se deben tener en cuenta los siguientes casos.

- Para resolver una expresión sin signos de agrupación, primero se deben resolver las multiplicaciones y divisiones indicadas en su orden respectivo. Luego se resuelven las sumas y restas correspondientes de izquierda a derecha.
- Si coinciden varios operadores de igual prioridad en una expresión aritmética el orden de ejecución es de izquierda a derecha.
- Para resolver una expresión con signos de agrupación estos se deben eliminar de adentro hacia afuera para esto se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos. Con el propósito de evitar confusiones se pueden utilizar diferentes signos de agrupación: ( ), [ ], { }.

Operador	Operación	Ejemplos	Prioridad
$+$	Suma	$a+b$	2
$-$	Resta	$a-b$	
$\times$, $\cdot$, $*$	Multiplicación	$a\times b$, $a\cdot b$, $a*b$	1
$\div$, $/$	División	$a\div b$, a/b	

Desarrollar las siguientes expresiones e indicar el orden en que se solucionan las operaciones.

- 5 + 4 X 3= 5+ 12 = 17
- (10÷ 2) X 5= 5 X 5= 25
- 6 X 10 ÷ 2= 60 ÷ 2= 30

Responder la siguiente pregunta:

¿Qué diferencia encontró al desarrollar las anteriores operaciones?

El orden en que se desarrollan debido a que existe el orden por agrupación y por operaciones.

V. Aplicación y evaluación:

Actividad # 4

Supermercado matemático. Adaptado de Rodríguez, Chamoso & Rawson(2002)

Formar grupos de cuatro estudiantes y comprar los productos indicados en la lista y completar la siguiente tabla.

Grupo 1

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Libros	$ 14400	$1200	3 unidades	$3600
Lápices	$6000	$500	6 unidades	$3000
Balones	$ 96000	$8000	1 unidad	$8000
Naranjas	$5400	$450	4 unidades	$1800
			TOTAL	**$16400**

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

Es $ 16400

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de las naranjas?

$14600

- ✓ Si tienes $10000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto hace falta para para el total de la compra?

Le hace falta $4600

- ✓ Si tengo $2250, ¿Me alcanza para comprar 5 naranjas?

Si ya que 5 naranjas cuestan $2250

Grupo 2

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Cuadernos	$25800	$ 2150	3 unidades	$6450
Doritos	$14400	$1200	10 unidades	$12000
Manzanas	$7200	$600	6 unidades	$3600
Galletas	$6000	$500	1 unidad	$ 500
			TOTAL	**$ 22550**

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

El total es $ 22550

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de los cuadernos?

El total es $ 16100

- ✓ Si tienes $5000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto hace falta para para el total de la compra?

Hacen falta $ 17550

- ✓ Si tengo $7200, ¿Me alcanza para comprar 10 manzanas?

Si y sobran $1200

Grupo 3

Producto	Valor Por docena ($)	Valor unidad ($)	Unidades por comprar	Total de compra en pesos ($)
Libros	$ 14400	$1200	2 unidades	$2400
Galletas	$ 8400	$700	7 unidades	$ 4900
Maní Moto	$ 13200	$1100	2 unidades	$2200
Marcadores	$12000	$1000	5 unidades	$5000
			TOTAL	**$14500**

Responder las siguientes preguntas con respecto a la lista de compras.

- ✓ ¿Cuál es el total de su compra?

El total de la compra es $ 14500

- ✓ ¿Cuánto es el total de la compra quitando el valor de las galletas?

El total es $9600

- ✓ Si tienes $20000 para ir al supermercado y comprar lo indicado en la lista de compra, ¿Cuánto dinero le sobra?

Le sobra $ 5500

- ✓ Si tengo $3500, ¿Me alcanza para comprar 5 galletas?

Si ya que cuesta $ 700 pesos cada una.

REFERENCIAS

Flores, P. & Otros. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Rico, L. y Flores, P. (Coords). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. (pp. 205 - 229). Madrid, España: Pirámide.

Polya, G. (2005). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press. Recuperado de. https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Salgado, D. (2007). Números naturales. *Matemáticas sexto*. Ed: Santillana.

Vergnaud, G. (2004). Problemas aditivos y multiplicativos. *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*, 191-193.

Anexo I. Calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo experimental

	Resolución de problemas con estrategia metodológica Taller Constructivo						
	Género	C. Inicial	Est. Aditiva	Est. Multi	Combinación	Prom.secue	C. Final
1	Hombre	7,8	10	9,5	10	9,8	8,7
2	Hombre	5,6	2	10	3	5,0	8
3	Hombre	4,5	10	4	6	6,7	4,5
4	Hombre	8,9	10	9,5	9	9,5	8,3
5	Hombre	6,7	4	6,5	6	5,5	9
6	Mujer	8,9	1	10	10	7,0	10
7	Hombre	7,8	2	7	9	6,0	8,3
8	Hombre	6,7	1,5	10	6	5,8	5
9	Hombre	8,9	4	6,5	10	6,8	6,3
10	Hombre	6	10	2	10	7,3	6,7
11	Hombre	8,9	9	10	10	9,7	8
12	Hombre	8,9	7,5	6	8	7,2	7,7
13	Hombre	8,9	1	9	10	6,7	8,3
14	Hombre	5,6	10	2	10	7,3	6
15	Hombre	4,5	7	7	8	7,3	3,7
16	Mujer	5	1	10	6	5,7	6,8
17	Mujer	6	1	10	8	6,3	7,3
18	Hombre	2,2	1	10	10	7,0	7,7
19	Mujer	2,2	1,5	4,2	6	3,9	8,6
20	Mujer	8,9	3,5	9	6	6,2	8,7
21	Mujer	8,9	10	10	7	9,0	6,2
22	Hombre	4,5	7,2	10	7	8,1	6,8
23	Hombre		10	10	10	10,0	2,7
24	Hombre	7,8	10	4	10	8,0	3,3
25	Hombre	1	3,5	1	1	1,8	1
26	Mujer	2,3	1	10	9	6,7	5,3
27	Mujer	6,7	7	7	6	6,7	8
28	Hombre	7,8	10	10	3	7,7	7
29	Mujer	4,5	10	1	8	6,3	7,3
30	Mujer	7,7	9	4,2	10	7,7	10

<u>C. Inicial:</u> Calificación del cuestionario Inicial
<u>Est. Aditiva:</u> Calificación de la secuencia didáctica de la estructura aditiva.
<u>Est. Multi:</u> Calificación de las secuencia didáctica de la estructura multiplicativa

Combinación: Calificación de las secuencia didáctica de las estructuras aditiva y multiplicativa
Prom.secue: Calificación del promedio del desempeño de los estudiantes de las tres secuencias desarrolladas.
C. Final: Calificación del cuestionario final

Anexo J. Calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo testigo

	Metodología Tradicional						
N°	Género	C. Inicial	Adic y sust	Multi y divi	Combinaciones	Prom.secu	C. Final
1	Hombre	4,4	4,5	1	5,5	3,7	4
2	Mujer	10	10	3,5	10	7,8	10
3	Hombre	1	8,5	6	5	6,5	8,3
4	Hombre	5,5	5	3	4	4,0	7
5	Mujer	7,8	6	4,5	2	4,2	3,3
6	Mujer	4,5	8,5	3,5	5,9	6,0	5
7	Hombre	1	3,5	1	3	2,5	1,7
8	Mujer	8,8	6,5	2	9,5	6,0	4
9	Mujer	6,6	8	3	7,9	6,3	7,7
10	Hombre	5,5	6,5	3,5	2	4,0	3,3
11	Hombre	7,3	10	9	10	9,7	6,3
12	Hombre	2,2	3	1	3	2,3	1
13	Mujer	3,3	7	5,9	5,9	6,3	4
14	Hombre	1,1	6,5	3	1	3,5	3,7
15	Mujer	8	6	3,5	8	5,8	2
16	Hombre	3,3	7	3,5	5,9	5,5	4,7
17	Hombre	6,6	7,5	5	7	6,5	4
18	Hombre	5,5	6,5	3,5	9,5	6,5	4
19	Hombre	7,7	3	5,9	5	4,6	6,3
20	Mujer	6,6	9,5	3	5,9	6,1	4
21	Mujer	5,6	9,5	3,5	5,9	6,3	2,3

C. Inicial: Calificación del cuestionario Inicial
Adic y sust: Calificación de la secuencia de los contenidos matemáticos adición y sustracción.
Multipli y divi: Calificación de la secuencia con los contenidos matemáticos adición y sustracción.
Combinación: Calificación de las secuencia con los contenidos matemáticos multiplicación y división.
Prom.secue: Calificación del promedio del desempeño de los estudiantes de las tres secuencias desarrolladas.
C. Final: Calificación del cuestionario final